V3 Felder (Funktionen mehrerer unabhängigen Variablen)

V3.1a

Orts- und zeitabhängige physikalische Größen werden durch "Felder" beschrieben.

Beispiel: Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik:

MAXWELL'S EQUATIONS

In general:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

In matter:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

AUXILLARY FIELDS

Definitions:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} \end{cases}$$

In linear media:

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, & \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, & \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \end{cases}$$

POTENTIALS: $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

Vektor-Analysis: nützlichen Identitäten

PRODUCT RULES

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = f(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\nabla f)$

(6) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

(7) $\nabla\times(f\mathbf{A}) = f(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla f)$

(8) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$

SECOND DERIVATIVES

(9) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla\times(\nabla f) = 0$

(11) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

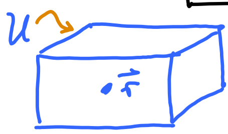
Ziel der folgenden Abschnitte ist, elementare Rechenoperationen für Felder einzuführen.

Beispiel 1: Temperatur im Zimmer

V3.1b

$$T: \underbrace{\mathcal{U}}_{\text{Menge aller Punkte im Zimmer}} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{r} \longmapsto T(\vec{r}) \quad = \text{Temperatur am Punkt } \vec{r}$$

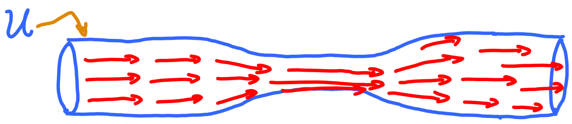


Beispiel 2: Zeitabhängige Temperatur im Zimmer

$$T: \underbrace{I}_{\text{Zeitintervall}} \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t,\vec{r}) \longmapsto T(t,\vec{r}) \quad = \text{Temperatur zur Zeit } t \text{ am Punkt } \vec{r}$$

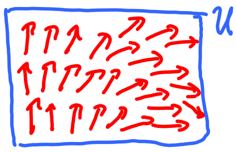
Beispiel 3: Luftfluss durch Tunnel



$$\vec{v}: I \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t,\vec{r}) \longmapsto \vec{v}(t,\vec{r}) \quad = \text{Luftgeschwindigkeit zur Zeit } t \text{ am Punkt } \vec{r}$$

Beispiel 4: Ferromagnet



$$\hat{n}: I \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \underbrace{S^2}_{\text{Menge aller Vektoren mit Betrag = 1}} = \{\hat{n} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\hat{n}\| = 1\}$$

$$(t,\vec{r}) \longmapsto \hat{n}(t,\vec{r}) \quad = \text{'Magnetisierung' zur Zeit } t \text{ am Punkt } \vec{r}$$

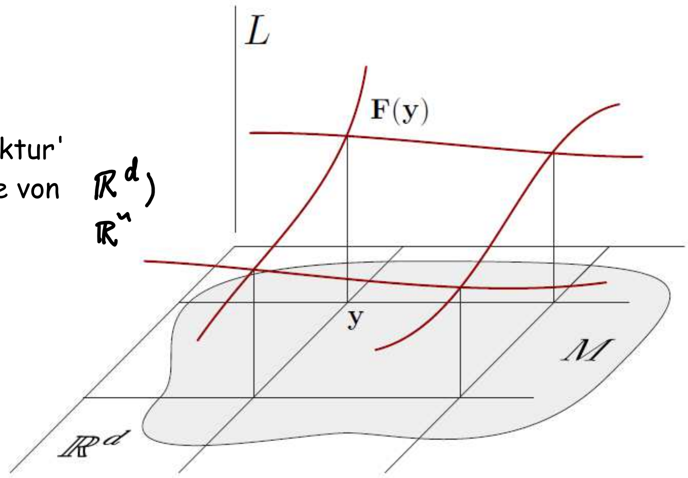
V3.1 Definition von Feldern

V3.1c

Allgemeine mathematische Struktur eines 'Feldes':

$$\vec{F}: M \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow L \subset \mathbb{R}^n$$
$$\vec{y} = (y^1, \dots, y^d)^T \longmapsto \vec{F}(\vec{y}) = \left(F^1(\vec{y}), \dots, F^n(\vec{y})\right)^T$$

M : 'Basismannigfaltigkeit'
L : 'Zielmannigfaltigkeit'



'Mannigfaltigkeit' = 'glatte geometrische Struktur'
(für aktuelle Zwecke: d-dimensionale Teilmenge von $\mathbb{R}^d$)
n. $\mathbb{R}^n$

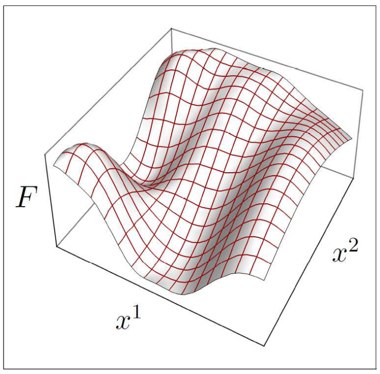
$n=1$: 'Skalarfeld'

Beispiele: Temperatur, Druck, Dichte

$n>1$: 'Vektorfeld'

Beispiele: Luftfluss, Magnetfeld, Elektrisches Feld, Gravitationskraftfeld

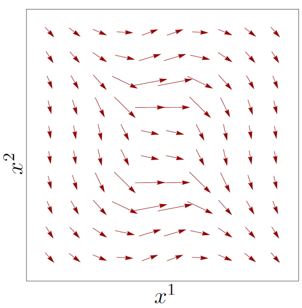
V3.1d

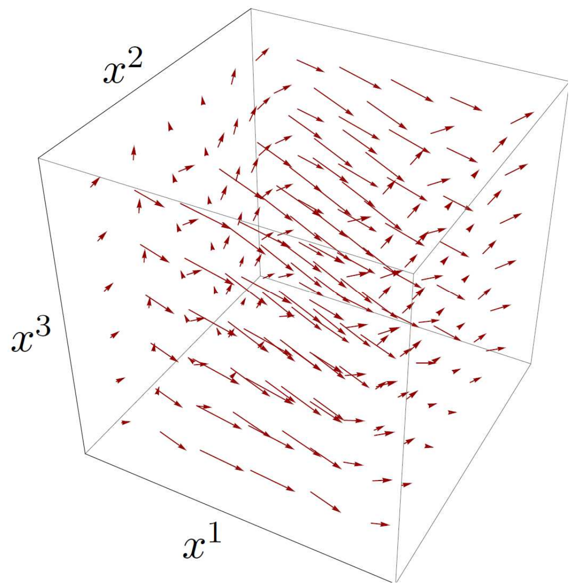


Skalarfeld: $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
(z.B. Höhe eines Gebirges)

Vektorfeld: $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
(z.B. Stromfluss im Wassertank)

Vektorfeld: $\vec{v}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
(z.B. Stromfluss an Wasseroberfläche)





Wie ändern sich Felder als Funktion v. $\vec{x}$?
Wie bildet man Ableitungen von Feldern? C3: Partielle Ableitungen

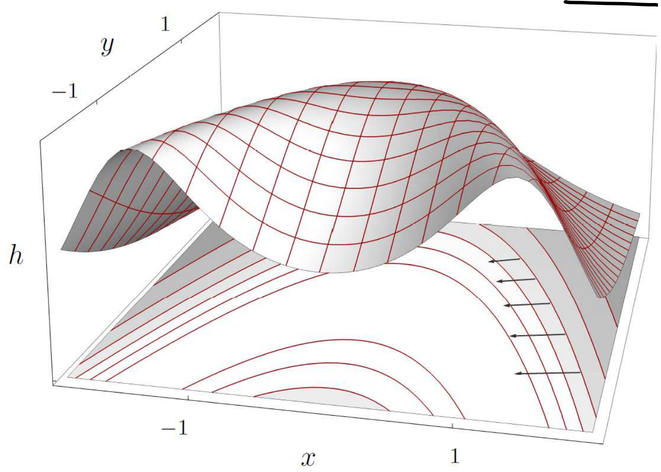
V3.2 Skalare Felder $(\dim h = n = 1)$

Beispiel: Höhenfeld

$$h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x} \mapsto h(\vec{x}) \qquad (1)$$

$$h(\vec{x}) = h(x,y) = \frac{1}{(x^2+y)^2 + c} \qquad (2)$$



Kontur-Linien: $h(x,y) = \text{const.}$ (3)

Dort, wo Konturlinien dicht liegen, ist es 'steil'.

Funktion ändert sich am schnellsten in Richtung senkrecht zu den Konturlinien.
Frage: Welcher Vektor gibt diese Richtung an?

Antwort: Gradient:

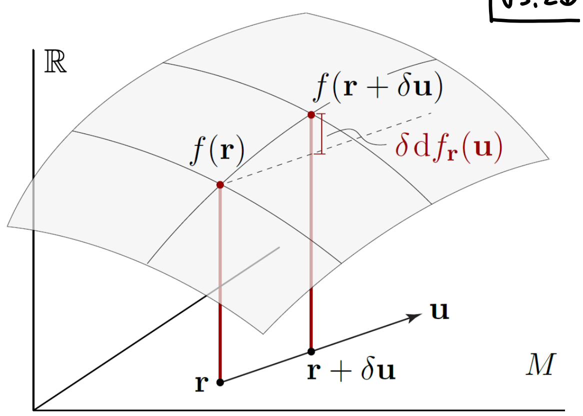
(wird im Folgenden eingeführt)

$$\vec{\nabla} h_{\vec{x}} \overset{\text{vergleiche (V3i.5)}}{=} \begin{pmatrix} \partial_x h \\ \partial_y h \end{pmatrix} = -\frac{2(x^2+y)}{[(x^2+y)^2+c]^2} \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Totales Differential

Gegeben eine Funktion $f: M \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$$



Was ist die infinitesimale Änderung von $f(\vec{r})$
an einem gegebenen Punkt $\vec{r} \in M$
entlang eines vorgegebenen Vektors $\vec{u} \in \mathbb{R}^d$?

'totales Differential' liefert die Antwort:

$$df_{\vec{r}} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{u} \longmapsto \boxed{df_{\vec{r}}(\vec{u}) \equiv \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}\left[f(\vec{r} + \delta\vec{u}) - f(\vec{r}) \right]} \qquad (1)$$

vergleiche "Mutter aller Ableitungen",

Das totale Differential $df_{\vec{r}}$ ist eine 'Maschine', definiert bei $\vec{r}$

die einen Vektor $\vec{u}$ frisst, und als Antwort eine Zahl 'ausspuckt', $df_{\vec{r}}(\vec{u})$,

nämlich die differenzielle Änderung v. f bei einem $\vec{u}$ -Schritt

Anmerkung: trotz des "d" in der Notation, ist das totale Differential im Allgemeinen nicht infinitesimal klein! Es ist nur dann klein, wenn der Vektor im Argument klein ist!

Totales Differential in kartesischen Koordinaten

V3.2c

$\vec{r} = \vec{r}(\vec{x})$ (identifiziere $\vec{r}$ mit $\vec{x}$)

$$df_{\vec{x}}(\vec{u}) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\left[f(\vec{x}+\delta\vec{u}) - f(\vec{x})\right] \overset{(C3d.4)}{=} \frac{\partial f}{\partial x^k} u^k = \partial_k f\, u^k \qquad (1)$$

Tot. Differential ist linear: $df_{\vec{x}}(a\vec{u} + b\vec{w}) = \partial_k f(a u^k + b w^k)$ (2)

Wirkung auf Standard-basisvektor:
d.h. wähle $\vec{u} = \vec{e}_j$

$$df_{\vec{x}}(\vec{e}_j) \overset{(1)}{=} \partial_k f\, (\underbrace{\vec{e}_j)^k}_{\delta^k{}_j} = \partial_j f \qquad (3)$$

beschreibt Steigung von f in j-Richtung

Tot. Differential von Koordinatenfunktion:
d.h. wähle $f(\vec{x}) = x^i$

$$dx^i_{\vec{x}}(\vec{u}) \overset{(1)}{=} \underbrace{\partial_k x^i}_{\delta^i{}_k} u^k = u^i \qquad (4)$$

liefert i-Komponente des Argumentenvektors

(4) eingesetzt in (1): $df_{\vec{x}}(\vec{u}) = \partial_k f\, dx^k_{\vec{x}}(\vec{u})$ (5)

(5) gilt für beliebige $\vec{u}$: $\Longrightarrow$ $\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k}$ (6)

dies ist die 'saubere' Begründung für die Notation, $dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx$ die wir bei Integration durch Substitution benutzen!

Beispiel: Höhenfeld

V3.2d

$$h(x,y) = \frac{1}{(x^2+y)^2 + c} \qquad \vec{u} = (u^x, u^y)^T$$

$$dh_{\vec{x}}(\vec{u}) \overset{(c.1)}{=} (\partial_x h)\, u^x + (\partial_y h)\, u^y \overset{(a.4)}{=} -\frac{2(x^2+y)}{[(x^2+y)^2+c]^2}\left[2x\, u^x + 1\cdot u^y\right] \qquad (1)$$

nachdifferenziert

Kompakt-notation:

$$dh \overset{(c.6)}{=} -\frac{2(x^2+y)}{[(x^2+y)^2+c]^2}\left[2x\, dx + 1\, dy\right] \qquad (2)$$

$$dh_{\vec{x}}(\vec{u}) \overset{(2)}{=} -\frac{2(x^2+y)}{[(x^2+y)^2+c]^2}\Big[2x\, \underbrace{dx(\vec{u})}_{(c.4)\ u^x} + 1\, \underbrace{dy(\vec{u})}_{(c.4)\ u^y}\Big] = (1) \checkmark \qquad (3)$$

konsistent

Beispiel: Druck als Funktion v. Volumen und Temperatur: $p(V,T)$

Physik-Sprech: Volumen- und Temperaturänderung, dV, dT, liefern Druckänderung

$$dp = \partial_V p\, dV + \partial_T p\, dT \qquad (4)$$

Mathe-Sprech: Volumen- und Temperaturänderung, δV , δT liefern Druckänderung

$$\delta p = p(V+\delta V, T+\delta T) - p(V,T) \overset{(C3d.4)}{=} \partial_V p\, \delta V + \partial_T p\, \delta T \qquad (5)$$

ausgedrückt durch totale Differentiale, wirkend auf $\vec{u} \equiv (\delta V, \delta T)^T$

$$\overset{(c.4)}{=} \partial_V p\, \overbrace{dV(\vec{u})}^{\delta V} + \partial_T p\, \overbrace{dT(\vec{u})}^{\delta T} \overset{(c.1)}{=} dp(\vec{u}) \qquad (6)$$

Fazit: δp ergibt sich aus tot. Differenzial dp, angewendet auf kleinen Vektor $\vec{u} = (\delta V, \delta T)^T$

Gradient

$$df_{\vec{x}}(\vec{u}) \overset{(c1)}{=} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^k} u^k = (\partial_k f) u^k \equiv (\partial^i f)\, \delta_{ik}\, u^k \equiv \langle \vec{\nabla} f, \vec{u} \rangle \qquad (1)$$

(1) sieht aus wie ein Skalarprodukt von $\vec{u}$ mit einem weiteren Vektor, $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = w^i \delta_{ik} u^k$
dessen Komponenten aus den Ableitungen von f bestehen.

Def: 'Gradient v. f am Punkt $\vec{x}$:

$$\text{'grad } f\text{'} = \vec{\nabla} f : M \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{x} \mapsto \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \equiv \begin{pmatrix} \partial^1 f(\vec{x}) \\ \partial^2 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial^d f(\vec{x}) \end{pmatrix} \equiv \vec{e}_i \, (\vec{\nabla} f_{\vec{x}})^i \qquad (3)$$

i-Komponente des Gradienten-Vektors:

$$(\vec{\nabla} f)^i \equiv \partial^i f \equiv \delta^{ij} (\partial_j f) = \partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \qquad (4) \qquad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

in kartesischen Koordinaten (= orthonormales System!)

Beispiel (d=2):
Höhenfeld: $h(x,y) = \frac{1}{(x^2+y)^2 + c}$:

(siehe Fig, Seite V3.2a !)

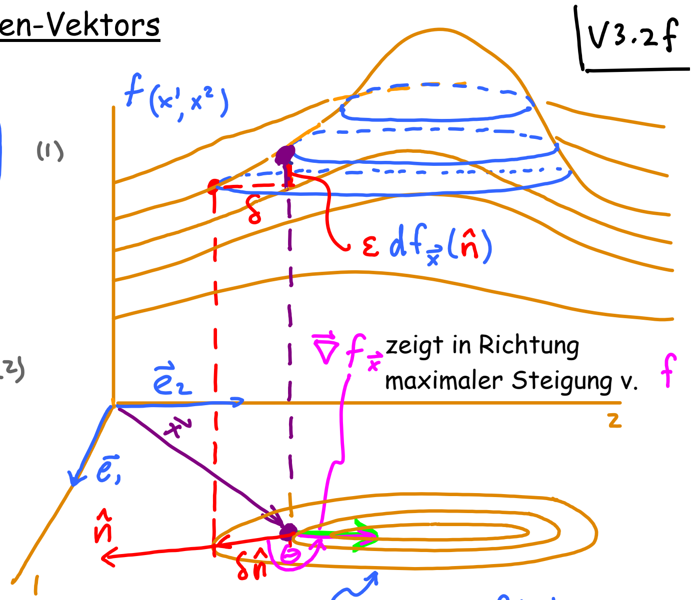
$$\vec{\nabla} h_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \partial_x h \\ \partial_y h \end{pmatrix} \overset{\text{vergleiche (a.4)}}{=} -\frac{2(x^2+y)}{[(x^2+y)^2+c]^2} \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \partial_x h + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \partial_y h \qquad (5)$$

Geometrische Interpretation des Gradienten-Vektors

Skizze in d = 2 Dimensionen, zur Veranschaulichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{n} = \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\nabla} f_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \partial^1 f(\vec{x}) \\ \partial^2 f(\vec{x}) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

(sei ein Einheitsvektor, Richtung beliebig)



Höhen-, Konturlinien: $f(\vec{x})$ = konst.

$$df_{\vec{x}}(\hat{n}) \overset{(b1)}{\equiv} \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left[f(\vec{x} + \delta \hat{n}) - f(\vec{x}) \right] \qquad (2)$$

$$= \text{Änderung in } \hat{n} \text{-Richtung} \qquad (3)$$

$$\overset{(e.1)}{=} \langle \vec{\nabla} f_{\vec{x}}, \hat{n} \rangle \qquad (4)$$

$$\overset{(L3.2c.4)}{=} \cos\theta \, \|\vec{\nabla} f_{\vec{x}}\| \, \underbrace{\|\hat{n}\|}_{=1} \qquad (5)$$

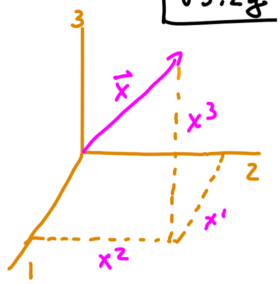
$$= \begin{cases} \text{maximal falls } \hat{n} \parallel \vec{\nabla} f_{\vec{x}} & \Longrightarrow \\ 0 \text{ falls } \hat{n} \perp \vec{\nabla} f_{\vec{x}} & \Longrightarrow \end{cases}$$

$\vec{\nabla} f_{\vec{x}}$ zeigt in Richtung maximaler Steigung v. f (6a)
maximale Steigung ist gegeben durch $\|\vec{\nabla} f_{\vec{x}}\|$ (6b)

$\vec{\nabla} f_{\vec{x}}$ steht $\perp$ auf den Höhenlinien v. f (7)
(allgemeiner: Höhenflächen)

Beispiel: Sei

$$f(\vec{x}) = \|\vec{x}\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} = r \qquad (1)$$



(2)

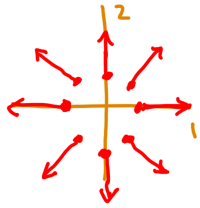
$$\vec{\nabla} f_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \partial^1 f(\vec{x}) \\ \partial^2 f(\vec{x}) \\ \partial^3 f(\vec{x}) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

mit $$\partial^1 f = \frac{\partial f}{\partial x^1} \overset{KR}{=} \frac{1}{2} \left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \right]^{-1/2} \cdot 2 x^1 = \frac{x^1}{\|\vec{x}\|} \qquad (4)$$

Analog für die anderen Komponenten, also:

$$\vec{\nabla} f_{\vec{x}} = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \hat{x}$$

= nach 'aussen' gerichteter Einheitsvektor (5)



Nabla-Operator

Erinnerung: Gradient

$$\underbrace{\vec{\nabla} f}_{\text{'grad f'}} : M \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \qquad (1) \quad \text{mit } \partial^i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \vec{e}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \mapsto \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \overset{(e.3)}{\equiv} \begin{pmatrix} (\vec{\nabla} f)^1 \\ (\vec{\nabla} f)^2 \\ \vdots \\ (\vec{\nabla} f)^d \end{pmatrix} \overset{(e.4)}{\doteq} \begin{pmatrix} \partial^1 f(\vec{x}) \\ \partial^2 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial^d f(\vec{x}) \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{d} \vec{e}_i \partial^i \right)}_{\equiv \vec{\nabla}} f \equiv \vec{\nabla} f \qquad (2)$$

Definition: '<u>Nabla-Operator</u>':
(in kartesischen Koordinaten;
Definition üblich für d = 2 und 3)

(nützliche Eselsbrücke, zum Merken von Gradient, Divergenz und Rotation)

$$\boxed{\vec{\nabla} \equiv \sum_{i=1}^{d} \vec{e}_i \partial^i = \begin{pmatrix} \partial^1 \\ \partial^2 \\ \vdots \\ \partial^d \end{pmatrix}} \qquad (3)$$

$\vec{\nabla}$ ist ein Vektor-Differentialoperator, wirkt auf alle Funktionen, die rechts von ihm stehen.

beinhaltet Ableitungen

liefert einen Vektor, wenn er auf eine skalare Funktion einwirkt (4)

V3.2i

Beispiel:
(d=2)

$$\vec\nabla\left(e^{3x^1}\sin(x^2)\right) = \begin{bmatrix}\partial^1\\ \partial^2\end{bmatrix}\left(e^{3x^1}\sin(x^2)\right) = \begin{bmatrix}3e^{3x^1}\sin(x^2)\\ e^{3x^1}\cos(x^2)\end{bmatrix} \qquad (1)$$

Mathematische Struktur des Nabla-Operators:

Sei $$f \in \underbrace{F}_{\text{Raum der Funktionen:}} = \{g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ \vec x \to g(\vec x) \mid \text{g hinreichend glatt}\} \qquad (2)$$

$$\vec\nabla : F \longrightarrow F^d \qquad (3)$$

$$f \longmapsto \vec\nabla f = \begin{bmatrix}\partial^1 f\\ \vdots\\ \partial^d f\end{bmatrix} \qquad (4)$$

Rechenregeln:

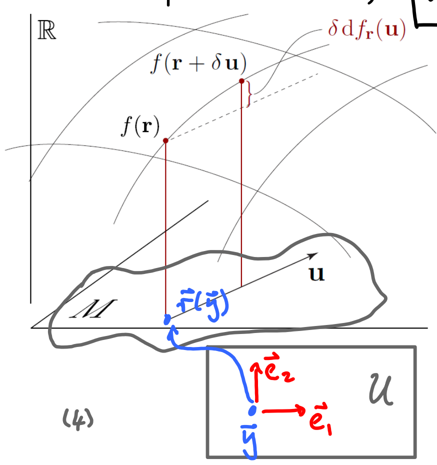
$$\vec\nabla(f+g) = \vec\nabla f + \vec\nabla g \qquad (5)$$

$$\vec\nabla(fg) = (\vec\nabla f)g + f(\vec\nabla g) \qquad \text{(Produktregel)} \qquad (6)$$

Beweis v. (6): $$= \partial^i(fg) \overset{\text{Produktregel}}{=} (\partial^i f)g + f(\partial^i g) \qquad (7)$$

V3.2j

Totales Differential in krummlinigen Koordinaten (das werden Sie später brauchen)



Koordinaten-
system: $\vec r : \mathcal{U} \to M,\ \vec y \mapsto \vec r(\vec y)$ (1)

Funktion: $f : M \to \mathbb{R},\ \vec r \mapsto f(\vec r)$ (2)

Induzierte
Funktion: $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R},\ \vec y \longmapsto f(\vec r(\vec y)) \equiv f(\vec y)$ (3)

Totales Differential:

$$df_{\vec r(\vec y)}(\vec u) = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left[f(\vec r(\vec y)+\delta\vec u) - f(\vec r(\vec y))\right] \qquad (4)$$

Wähle $\underbrace{\vec u = \vec v_j}_{\text{Koordinatenbasisvektor}} = \partial_{y^j}\vec r$ mit $\vec r(\vec y)+\delta\vec v_j = \vec r(\vec y)+\delta\partial_{y^j}\vec r \simeq \overset{\vec r(y^1,\dots,y^j+\delta,\dots,y^d)}{\overset{=}{\vec r(\vec y+\delta\vec e_j)}}$ (5)

(c3d.4)

$$df_{\vec r(\vec y)}(\vec v_j) \overset{(4)}{=} \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left[f(\vec r(\vec y)+\delta\vec v_j) - f(\vec r(\vec y))\right] \overset{(5)}{=} \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left[f(\vec r(\vec y+\delta\vec e_j)) - f(\vec r(\vec y))\right] = \frac{\partial f(\vec r(\vec y))}{\partial y^j} \qquad (6)$$

Kompaktnotation: $$\boxed{df_{\vec y}(\vec v_j) = \partial_{y^j} f(\vec y) \equiv \partial_j f(\vec y)} \qquad \text{[analog zu (c.3) !]} \qquad (7)$$

Totales Differential in krummlinigen Koordinaten (Fortsetzung) (analog zu Seite 7)

V3.2k

$\vec{u}$ sei ein beliebiger Vektor, entwickelt in Koordinatenbasis: $\vec{u} = \vec{v}_k u^k$ (1)

$$d_{\vec{y}} f(\vec{u}) \overset{(1)}{=} d_{\vec{y}} f(\vec{v}_k u^k) \overset{\substack{(2c.2)\\ \text{Linearität}}}{=} \underbrace{d_{\vec{y}} f(\vec{v}_k)}_{(j.7)\ \partial_{y^k} f(\vec{y})} u^k = \partial_k f\, u^k \tag{2}$$

Für Koordinatenfunktion:

$$f(\vec{y}) = y^i : \quad d y^i_{\vec{y}}(\vec{u}) \overset{(2)}{=} \underbrace{\partial_{y^k} y^i}_{\delta^i{}_k} u^k = u^i \qquad \text{analog zu (c.4)} \tag{3}$$

(3) eingesetz in (2): $d_{\vec{y}} f(\vec{u}) \overset{(2,3)}{=} \partial_k f \; d y^k_{\vec{y}}(\vec{u})$ analog zu (c.5) (4)

(5) gilt für beliebige $\vec{u}$: $\Longrightarrow$ $\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial y^k} dy^k}$ analog zu (c.6) (5)

<u>Gradient:</u>

$$\boxed{df_{\vec{y}}(\vec{u})} \overset{(2)}{=} \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^j} u^j = (\partial_j f) u^j \overset{(e.1)}{\equiv} \boxed{\langle \vec{\nabla} f, \vec{u} \rangle} \tag{6}$$

definierende Gleichung für $\vec{\nabla} f$

Der 'Gradientenvektor' $\vec{\nabla} f \in \mathbb{R}$ ist durch die Forderung definiert, dass (6) gilt für <u>alle</u> $\vec{u} \in \mathbb{R}$.

Bestimmung des Gradientenvektors in krummlinigen Koordinaten

V3.2l

Definierende Gleichung: $d_{\vec{r}} f(\vec{u}) \overset{(k.6)}{=} \langle \vec{\nabla} f, \vec{u} \rangle = (\vec{\nabla} f)^i g_{ik} u^k \overset{(3)}{=} (\vec{\nabla} f)_k u^k$ (1)

<u>Gesucht</u>: Komponenten des Gradienten in Koordinatenbasis: $\vec{\nabla} f \equiv \vec{v}_i (\vec{\nabla} f)^i$ (2)

Wähle $\vec{u} = \vec{v}_j$:

$$\partial_j f \overset{(j.7)}{=} df_{\vec{y}}(\vec{v}_j) \overset{(1)}{=} \langle \vec{\nabla} f, \vec{v}_j \rangle \overset{(2)}{=} (\vec{\nabla} f)^i \underbrace{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle}_{(V2g.1)\ = g_{ij}} = (\vec{\nabla} f)^i g_{ij} \overset{(L3.3c.8)}{=} (\vec{\nabla} f)_j \tag{3}$$

g_{ij} ← Metrik des krummlinigen Koordinatensystems

Fazit: kovariante Komponenten des Gradientenvektors: $(\vec{\nabla} f)_j \overset{(3)}{=} \partial_j f = \frac{\partial f}{\partial y^j}$ (4)

Kontravarianten Komponenten: $(\vec{\nabla} f)^i \overset{(L3.3c.10)}{=} g^{ij} (\vec{\nabla} f)_j = g^{ij} \partial_j f \equiv \partial^i f$ (5)

Def: 'Gradient v. f am Punkt $\vec{r}(\vec{y})$:

$$\text{'grad f'} = \vec{\nabla} f : M \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{r} \longmapsto \boxed{\vec{\nabla}_r f \overset{(2)}{=} \vec{v}_i (\vec{\nabla} f)^i \overset{(5)}{=} \vec{v}_i g^{ij} \partial_j f} \tag{6}$$

In kartesischen Koordinaten:

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad \partial^i = g^{ij} \partial_j = \partial_i, \quad \vec{v}_j = \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\nabla}_r f = \vec{e}_i \partial^i f = \begin{pmatrix} \partial^1 f \\ \vdots \\ \partial^d f \end{pmatrix} \tag{7}$$

Beispiele für Gradient in krummlinig-orthogonalen Koordinaten

V3.2m

Für orthogonal krummlinige Koordinaten gilt: $g_{ij} = \delta_{ij}\, g_{ii}\,, \quad g^{ij} = \delta^{ij} g^{ii} = \delta^{ij} \frac{1}{g_{ii}}$ (1)

Gradient: $\vec{\nabla} f \overset{(\ell.6)}{=} \vec{v}_i\, g^{ij} \partial_j f \overset{(1)}{=} \underbrace{\vec{v}_i}_{\sqrt{g_{ii}}\,\vec{e}_i} \frac{1}{g_{ii}} \partial_i f = \vec{e}_i \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \partial_i f$ (2)

(V2g.4) (in Koordinatenbasis) (in lokaler Basis)

Polarkoordinaten: $\vec{r}(\rho, \phi)$: $g_{\rho\rho} = 1\,, \quad g_{\phi\phi} = \rho^2$ [siehe (V2g.3)] (3)

$$\vec{\nabla} f \overset{(2)}{=} \vec{v}_\rho\, g^{\rho\rho} \partial_\rho f + \vec{v}_\phi\, g^{\phi\phi} \partial_\phi f \overset{(2)}{=} \vec{v}_\rho\, 1 \cdot \partial_\rho f + \vec{v}_\phi \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi f \overset{(V2g.4)}{=} \vec{e}_\rho \partial_\rho f + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho} \partial_\phi f \quad (4)$$

(in Koordinatenbasis) (in lokaler Basis)

Kugelkoordinaten: $\vec{r}(r, \theta, \phi)$: $g_{rr} = 1 \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta$ (5)

[siehe (V2n.3)]

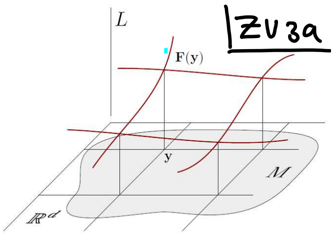
$$\vec{\nabla} f \overset{(2)}{=} \vec{v}_r\, g^{rr} \partial_r f + \vec{v}_\theta\, g^{\theta\theta} \partial_\theta f + \vec{v}_\phi\, g^{\phi\phi} \partial_\phi f \quad (6)$$

$$\overset{(1)}{=} \vec{v}_r\, 1 \cdot \partial_r f + \vec{v}_\theta \frac{1}{r^2} \partial_\theta f + \vec{v}_\phi \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\phi f \quad \text{(in Koordinatenbasis)} \quad (7)$$

$$\overset{(V2g.4)}{=} \vec{e}_r \partial_r f + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta f + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\phi f \quad \text{(in lokaler Basis)} \quad (8)$$

Zusammenfassung V3.1 Felder

ZV3a



$$\vec{F} : M \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow L \subset \mathbb{R}^n$$

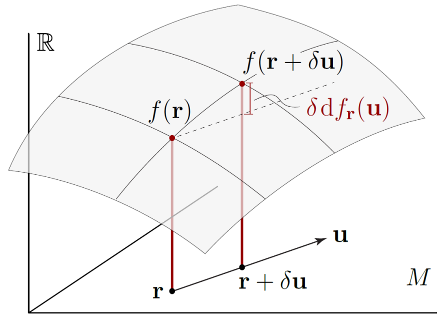
$$\vec{y} = (y^1, \dots, y^d)^T \longmapsto \vec{F}(\vec{y}) = (F^1(\vec{y}), \dots, F^n(\vec{y}))^T$$

V3.2 Skalarfelder, Gradient

Totales Differential: differentielle Änderung von f bei $\vec{r}$ durch einen $\vec{u}$ -Schritt:

$$df_{\vec{r}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\,, \quad \vec{u} \mapsto df_{\vec{r}}(\vec{u}) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left[f(\vec{r} + \delta\vec{u}) - f(\vec{r}) \right]$$

$$df_{\vec{y}}(\vec{u}) = \partial_{y^k} f(\vec{y})\, u^k = \partial_k f\, u^k \equiv \vec{\nabla} f_{\vec{y}} \cdot \vec{u}$$



Gradient in kartesischen Koordinaten: $\partial^i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$\underbrace{\vec{\nabla} f}_{\text{'grad f'}} : M \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d,$$

$$\vec{x} \longmapsto \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \equiv \begin{pmatrix} \partial^1 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial^d f(\vec{x}) \end{pmatrix} = \vec{e}_i \left(\vec{\nabla} f\right)^i (\vec{x})$$

$\vec{\nabla} f_{\vec{y}}$ zeigt in Richtung maximaler Steigung v. f, steht $\perp$ auf den 'Höhenflächen' v. f

In krummlinigen Koordinaten: $\vec{\nabla}_r f = \vec{v}_i (\vec{\nabla} f)^i = \vec{v}_i\, g^{ij} \partial_j f$ (in Koordinatenbasis)

In krummlinig-orthogonalen Koordinaten: $= \vec{e}_i \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \partial_i f$ (in lokaler Basis)

$g_{i \neq j} = 0, \quad g^{ii} = 1/g_{ii}$