

### C3 Partielle Ableitungen

C3a

Betrachte  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = f(x^1, x^2, \dots, x^d)$  (Skalarfeld) (1)

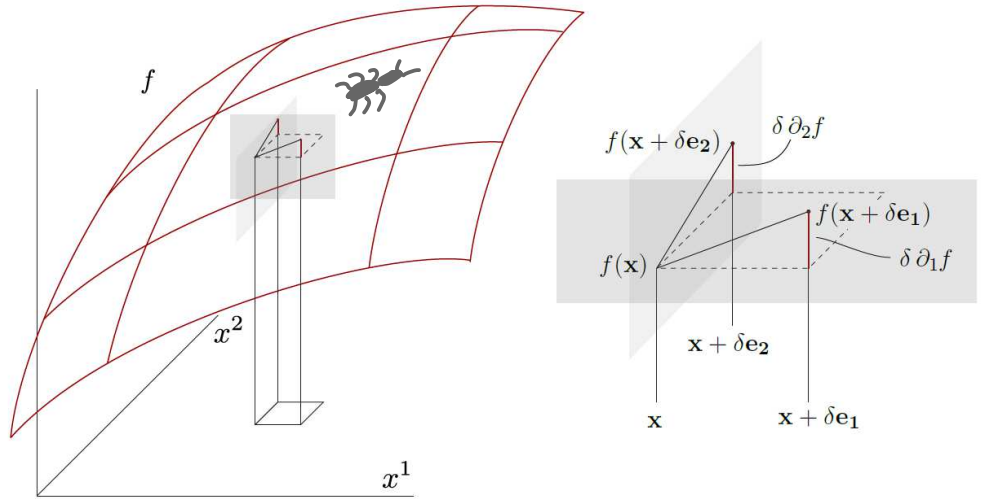
Beispiel für  $d=2$ : Höhe eines kugelförmigen Zeltdachs:  $x^2 + y^2 + h^2 = R^2$

$$\vec{x} = (x, y)^T = (x^1, x^2)^T, \quad f(\vec{x}) = [R^2 - x^2 - y^2]^{1/2} = [R^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2]^{1/2} \quad (2)$$

#### C3.1 Partielle Ableitung

Wie ändert sich  $f(\vec{x})$  als Funktion v. nur einer der Variablen,  $x^i$ , wenn die anderen Variablen festgehalten werden?

'Ameise auf Zeltdach:  
wie ändert sich ihre Höhe,  
wenn sie parallel zur  
 $i$ -Achse krabbelt?'



Wie ändert sich  $f(\vec{x})$  als Funktion v. nur einer der Variablen,  $x^i$ ?

C3b

Definition: 'Partielle Ableitung' von  $f$  am Punkt  $\vec{x}$ , nach  $x^i$ :

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(x^1, \dots, x^i + \delta, \dots, x^d) - f(x^1, \dots, x^i, \dots, x^d)] \quad (1)$$

↑ nur  $x^i$  ändert sich, um  $\delta$

In Vektornotation:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^d \end{pmatrix} = \vec{e}_i x^i$$

↑  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{x} + \delta \vec{e}_i) - f(\vec{x})] \equiv \partial_i f(\vec{x}) \quad (2)$$

Lineare Näherung:  $f(\vec{x} + \delta \vec{e}_i) = f(\vec{x}) + \delta \partial_i f(\vec{x}) \quad (2')$

Alternative Notationen:  $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \partial_{x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_i f(\vec{x}) \equiv f_i(\vec{x}) \quad (3)$

↑ eher unüblich  
↑ Lieblingsnotation

Merkregel: Index oben 'im Nenner der Ableitung' = Index unten in Kurznotation für Ableitung

Beispiele:  $\partial_y (x \cos(y)) = -x \sin(y) \quad (4)$

$$\partial_{x^1} (e^{3x^1} \sin(x^2)) = 3e^{3x^1} \sin(x^2) \quad (5)$$

$$\partial_2 (e^{3x^1} \sin(x^2)) = e^{3x^1} \cos(x^2) \quad (6)$$

↑ [Index, nicht Potenz!]

### C3.2 Mehrfache partielle Ableitungen (rekursive Definition)

C3c

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}) \right) \equiv \frac{\partial^2}{\partial (x_i)^2} f(\vec{x}) \equiv \partial_{x_i}^2 f(\vec{x}) \equiv \partial_i^2 f(\vec{x}) \quad (1)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}) \right) \dots \right)}_{n \text{ mal}} \equiv \frac{\partial^n}{\partial (x_i)^n} f(\vec{x}) \equiv \partial_{x_i}^n f(\vec{x}) \equiv \partial_i^n f(\vec{x}) \quad (2)$$

Gemischte partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}) \right) \equiv \partial_{x_j} \partial_{x_i} f(\vec{x}) \equiv \partial_j \partial_i f(\vec{x}) \equiv \partial_{j,i}^2 f(\vec{x}) \equiv f_{j,i}(\vec{x}) \quad (3)$$

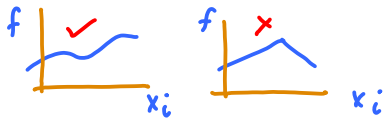
Beispiel v. Seite C3a:

$$\partial_2 \partial_1 (e^{3x^1} \sin(x^2)) \stackrel{(b.5)}{=} \partial_2 3e^{3x^1} \sin(x^2) = 3e^{3x^1} \cos(x^2) \quad (4)$$

$$\partial_1 \partial_2 (e^{3x^1} \sin(x^2)) \stackrel{(b.6)}{=} \partial_1 e^{3x^1} \cos(x^2) = 3e^{3x^1} \cos(x^2) \quad (5)$$

gleich!

Satz v. Schwarz: Für hinreichend glatte Funktionen sind partielle Ableitungen vertauschbar:



$$\partial_i \partial_j f(\vec{x}) = \partial_j \partial_i f(\vec{x}) \quad (6)$$

'Hinreichend glatt' bedeutet: alle Ableitungen bis mindestens zur 2.ten Ordnung sind stetig (AD-Buch, Seite 231, Fußnote 12)

↳  $\partial_i^2 f, \partial_j^2 f, \partial_i \partial_j f, \partial_j \partial_i f$

[Beispiel wo dies nicht gilt: AD-Buch, S. 231]

### C3.3 Gleichzeitige Änderung aller Variablen

C3d

'Wie ändert sich Höhe von Ameise auf Zeltdach, wenn sie parallel zu  $\vec{z}$  krabbelt?'

beliebiger, vorgegebener Vektor

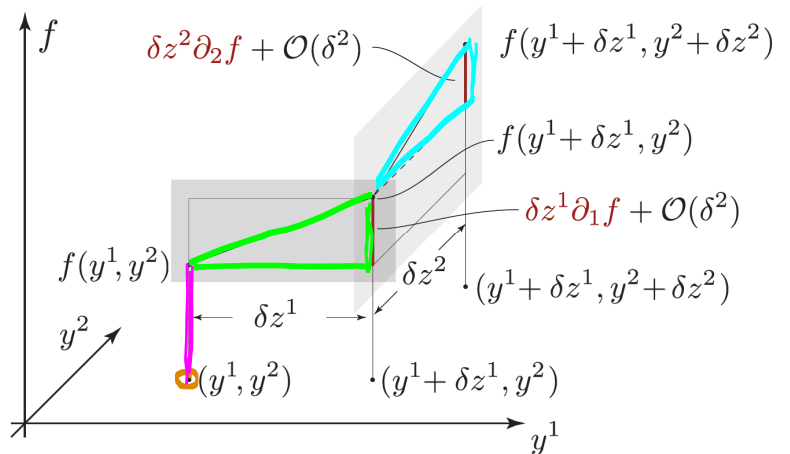
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \vec{y} \mapsto f(\vec{y}) \quad (1)$$

Wie ändert sich eine Funktion  $f(\vec{y})$  an einem gegebenen Punkt  $\vec{y} = (y^1, y^2)^T$

wenn sich beide Argumente gleichzeitig

ändern, von  $\vec{y}$  nach  $\vec{y} + \delta \vec{z}$

mit  $\delta$  klein und  $\vec{z} = (z^1, z^2)^T$  beliebig?



$$\text{Es gilt: } \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y})] = \delta z^1 \frac{\partial}{\partial y^1} f(\vec{y}) + \delta z^2 \frac{\partial}{\partial y^2} f(\vec{y}) = \delta \sum_{j=1}^2 \partial_j f(\vec{y}) z^j \quad (2)$$

(Begründung: Seite C3e)

Verallgemeinerung: Für  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \vec{y} \mapsto f(\vec{y})$  gilt:

(3)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y})] = \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial y^j} f(\vec{y}) z^j = \partial_j f(\vec{y}) z^j$$

kovariante Notation

Merke: linear in  $z^j$  ! (4)

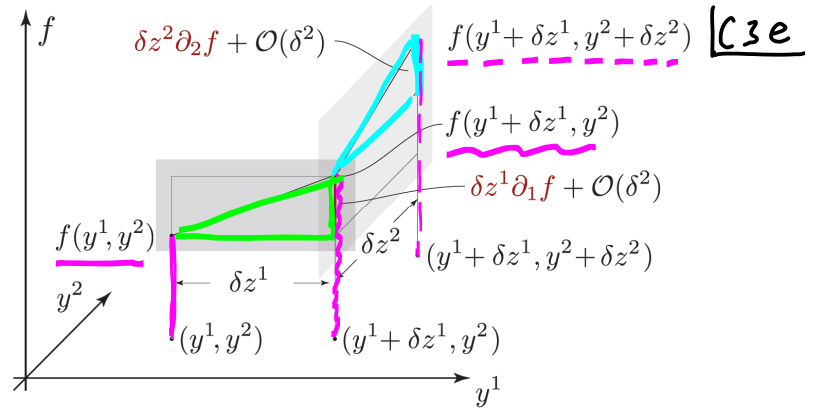
### Begründung für (d.2):

explizit für  $d = z$  :

$$\vec{y} = (y^1, y^2)^T \quad (1)$$

$$\delta \vec{z} = (\delta z^1, \delta z^2)^T \quad (2)$$

$$[f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y})] = ? \quad (3)$$



$$[ ]^{(2)} = \underbrace{f(y^1 + \delta z^1, y^2 + \delta z^2) - f(y^1 + \delta z^1, y^2)}_{\text{subtrahiere und addiere dieselbe Größe}} + \underbrace{f(y^1 + \delta z^1, y^2) - f(y^1, y^2)}_{\text{addiere dieselbe Größe}} \quad (4)$$

$$\approx (\delta z^2) \partial_2 f(y^1 + \delta z^1, y^2) + (\delta z^1) \partial_1 f(y^1, y^2) \quad (5)$$

$$\approx \delta z^2 \partial_2 [f(y^1, y^2) + \delta z^1 \partial_1 f(y^1, y^2)] \quad (6)$$

(5) in (3): vernachlässigbar, weil v. Ordnung  $\mathcal{O}(\delta^2)$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y})] = \delta [ \partial_1 f(\vec{y}) z^1 + \partial_2 f(\vec{y}) z^2 ] = \sum_{j=1}^2 \partial_j f(\vec{y}) z^j = (d.2) \quad (7)$$

Analog folgt (d.4) für beliebiges  $d$

### Beispiel für (d.2)

C3f

$$f(\vec{y}) = f(y^1, y^2) = (y^1 + 3y^2)^2 \quad (1)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y})] \stackrel{(d.4)}{=} \partial_1 f(y^1, y^2) z^1 + \partial_2 f(y^1, y^2) z^2 \quad (2)$$

$$= 2(y^1 + 3y^2) z^1 + 6(y^1 + 3y^2) z^2 \quad (3)$$

Explizite Rechnung ist aufwendig... :

$$f(y^1, y^2) = (y^1)^2 + 6y^1 y^2 + 9(y^2)^2 \quad (4)$$

$$f(y^1 + \delta z^1, y^2 + \delta z^2) = (y^1 + \delta z^1)^2 + 6(y^1 + \delta z^1)(y^2 + \delta z^2) + 9(y^2 + \delta z^2)^2 \quad (5)$$

$$= (y^1)^2 + 2y^1 \delta z^1 + (\delta z^1)^2 + 6[y^1 y^2 + y^1 \delta z^2 + \delta z^1 y^2 + \delta z^1 \delta z^2] + 9(y^2)^2 + 18y^2 \delta z^2 + 9(\delta z^2)^2 \quad (6)$$

$$= (y^1)^2 + 6y^1 y^2 + 9(y^2)^2 + \delta [2y^1 z^1 + 6y^1 z^2 + 6y^2 z^1 + 18y^2 z^2] + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (7)$$

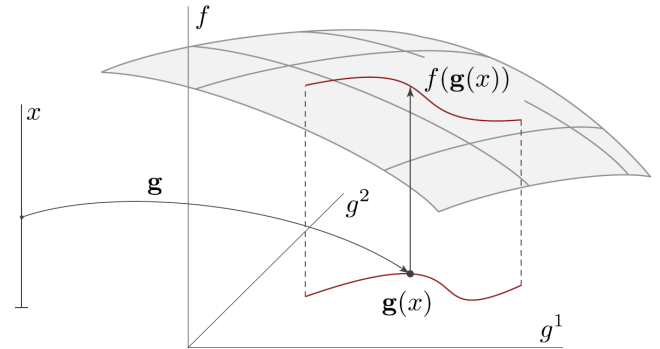
$$= f(y^1, y^2) + \delta [2(y^1 + 3y^2) z^1 + 6(y^1 + 3y^2) z^2] + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (8)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(y^1 + \delta z^1, y^2 + \delta z^2) - f(y^1, y^2)] = 2(y^1 + 3y^2) z^1 + 6(y^1 + 3y^2) z^2 = (3) \quad (9)$$

### C3.3 Kettenregel für Funktion von mehreren Variablen

C3g

'Wie ändert sich Höhe von Ameise auf Zeltdach mit Zeit, wenn sie entlang  $\vec{g}(x)$  krabbelt?'  
beliebiger, vorgegebener Weg



$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{y} \mapsto f(\vec{y}) = f(y^1, \dots, y^d) \quad (1)$$

$$\vec{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto \vec{g}(x) = (g^1(x), \dots, g^d(x))^T \quad (2)$$

$$f \circ \vec{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(\vec{g}(x)) = f(g^1(x), \dots, g^d(x)) \quad (3)$$

In Skizze:  $d=2$

Dann gilt:

$$\frac{d f(\vec{g}(x))}{dx} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f(\vec{g}(x))}{\partial g^j} \frac{d g^j(x)}{dx}$$

wie normale Kettenregel, aber summiert über  $j$  (4)

(Steigung von  $f$  mit  $x$ ) =  $\sum_j$  (Steigung von  $f$  mit  $g^j$ ) mal (Steigung von  $g^j$  mit  $x$ )

Falls der Kurvenparameter der Zeit entspricht,  $x = t$  :

$$\dot{f}(\vec{g}(t)) = \frac{d f(\vec{g}(t))}{dt} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f(\vec{g}(t))}{\partial g^j} \dot{g}^j(t) \quad (5)$$

### Begründung von Kettenregel (g.4)

C3h

$$\frac{d f(\vec{g}(x))}{dx} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \left[ f(\vec{g}(x+\delta)) - f(\vec{g}(x)) \right] = ? \quad (1)$$

Für jede Komponente  $g^j(x+\delta) = g^j(x) + \delta \frac{d}{dx} g^j(x)$  Mutter aller Ableitungen! (2)  
von  $\vec{g}$  gilt:  $\frac{d}{dx} g^j(x)$

Vektornotation:  $\vec{g}(x+\delta) = \vec{g}(x) + \delta \frac{d}{dx} \vec{g}(x) = \left( \frac{d}{dx} g^1(x), \dots, \frac{d}{dx} g^d(x) \right)^T$  (3)

$$\frac{d f(\vec{g}(x))}{dx} \stackrel{(3) \text{ in } (1)}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \left[ f(\vec{g}(x) + \delta \frac{d}{dx} \vec{g}(x)) - f(\vec{g}(x)) \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \left[ f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y}) \right] \quad (4)$$

Schreibe:  $\vec{g}(x) = \vec{y}, \quad \frac{d}{dx} \vec{g}(x) = \vec{z}$  (5)

Berechne rechte Seite von (h.4) mittels (d.4):

$$\frac{d f(\vec{g}(x))}{dx} \stackrel{(d.4)}{=} \sum_{j=1}^d \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^j} \Big|_{\vec{y}} z^j \stackrel{(5)}{=} \sum_{j=1}^d \frac{\partial f(\vec{g}(x))}{\partial g^j} \frac{d g^j(x)}{dx} \quad (6)$$

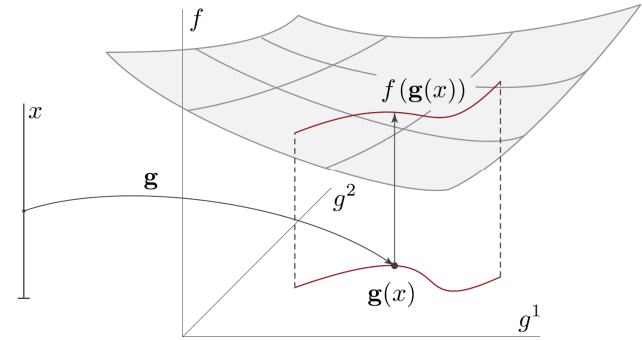
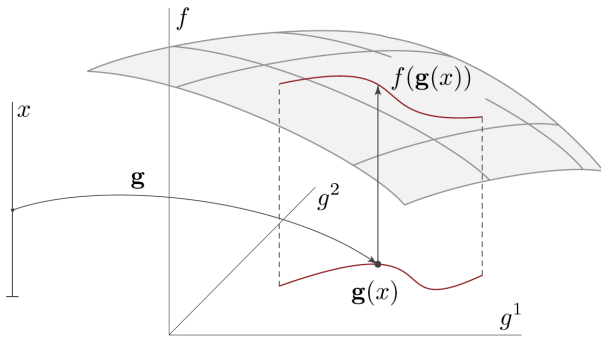
Beispiel:  $f(g^1, g^2) = \cos(g^1) + \sin(g^2), \quad g^1(x) = \sqrt{x}, \quad g^2(x) = 3x$  (7)

$$\frac{d f(\vec{g}(x))}{dx} = \frac{\partial f}{\partial g^1} \frac{d g^1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial g^2} \frac{d g^2}{dx} = -\sin(g^1(x)) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos(g^2(x)) \cdot 3 = -\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos(3x) \cdot 3 \quad (8)$$

Verallgemeinerung I:

C 3 i

'Wie ändert sich Höhe und Temperatur mit der Zeit, wenn Ameise entlang  $\vec{g}(x)$  krabbelt?'



$$\vec{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m, \vec{y} \mapsto \vec{f}(\vec{y}) = (f^1(\vec{y}), \dots, f^m(\vec{y}))^T \quad (1)$$

$$\vec{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d, x \mapsto \vec{g}(x) = (g^1(x), \dots, g^d(x))^T \quad (2)$$

$$\vec{f} \circ \vec{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto \vec{f}(\vec{g}(x)) = (f^1(\vec{g}(x)), \dots, f^m(\vec{g}(x)))^T \quad (3)$$

Dann gilt (g.4) für jede Komponente getrennt:

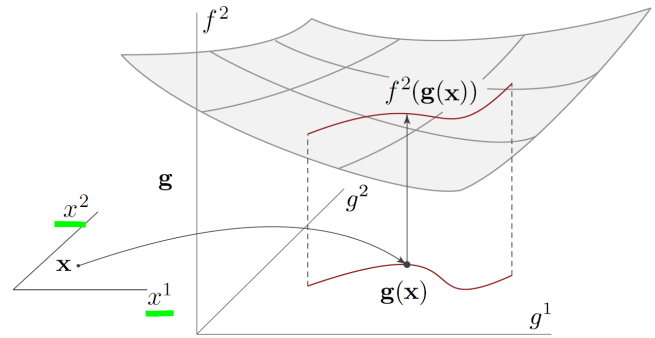
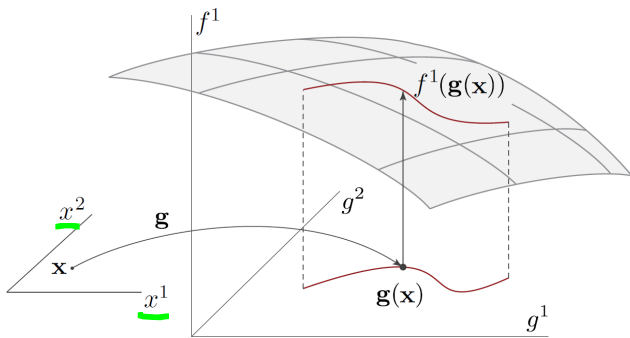
$$\frac{d f^i(\vec{g}(x))}{dx} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f^i(\vec{g}(x))}{\partial g^j} \frac{d g^j(x)}{dx} \quad i=1, \dots, m$$

wie normale Kettenregel für  $f^i$ , aber summiert über j (4)

Verallgemeinerung II:

C 3 j

'Wie ändert sich Höhe und Temperatur mit der Zeit und der Windstärke, wenn Ameise entlang  $\vec{g}(\vec{x})$  krabbelt?'



$$\vec{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m, \vec{y} \mapsto \vec{f}(\vec{y}) \quad (1)$$

$$\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d, \vec{x} \mapsto \vec{g}(\vec{x}) = \vec{g}(x^1, \dots, x^n) \quad (2)$$

$$\vec{f} \circ \vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{g}(\vec{x})) \quad (3)$$

Dann gilt (g.4) für jede Komponente getrennt:

$$\frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial g^j} \frac{\partial g^j(\vec{x})}{\partial x^k} \quad i=1, \dots, m, k=1, \dots, n$$

wie normale Kettenregel für  $f^i$ , aber summiert über j und partiell abgeleitet nach  $x^k$  (4)

# Beispiel: Geschwindigkeit an Wasseroberfläche

(Selbststudium!)

C3k

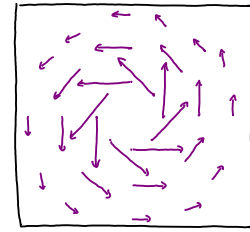
Betrachte erstens:

$$\vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \vec{g}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g^1(\vec{x}) \\ \vdots \\ g^d(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Beispiel für  $\vec{g}$ :

Geschwindigkeit an Wasseroberfläche,  $\vec{v}$ :



$$d = 2$$

$$n = 2$$

Betrachte zweitens:

$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad (m=1)$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^d \end{pmatrix} \mapsto f(\vec{y}) = f(y^1, \dots, y^d) \quad (3)$$

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v^1(\vec{x}) \\ v^2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Beispiel für f: Betragssquadrat des Vektors  $\vec{y}$ :

$$f(\vec{y}) = \|\vec{y}\|^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2 \quad (4)$$

Betrachte nun Verkettung v. f und g:

$$f \circ \vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{x} \mapsto f(\vec{g}(\vec{x}))$$

$$= f(g^1(\vec{x}), \dots, g^d(\vec{x})) \quad (5)$$

Beispiel für Verkettung: Betragssquadrat der Wassergeschwindigkeit am Punkt  $\vec{x}$ :

$$f(\vec{v}(\vec{x})) = \|\vec{v}(\vec{x})\|^2 \quad (5)$$

$$= (v^1(\vec{x}))^2 + (v^2(\vec{x}))^2$$

$$= \frac{1}{(x^2)^2} + \frac{1}{(x^1)^2} \quad (6)$$

Fortsetzung Beispiel: Wie ändert sich Geschwindigkeit an Wasseroberfläche mit  $x^1$ ?

C3e

$$\partial_1 f(\vec{v}(\vec{x})) \stackrel{(k.6)}{=} \partial_1 \left[ \frac{1}{(x^2)^2} + \frac{1}{(x^1)^2} \right] = \left[ 0 + \frac{-2}{(x^1)^3} \cdot 1 \right] = -\frac{2}{(x^1)^3} \quad (1)$$

Nochmal, nun mit der allgemeinen Kettenregel für partielle Ableitungen gerechnet:

$$f(\vec{y}) \stackrel{(k.4)}{=} (y^1)^2 + (y^2)^2, \quad (2a) \quad \vec{v}(\vec{x}) \stackrel{(c.2)}{=} \left( -\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^1} \right)^T \quad (2b)$$

$$\partial_1 f(\vec{v}(\vec{x})) \stackrel{(j.4)}{=} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^j} \Big|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \cdot \frac{\partial v^j(\vec{x})}{\partial x^1} \quad (3)$$

$$= \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^1} \Big|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \frac{\partial v^1(\vec{x})}{\partial x^1} + \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^2} \Big|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \frac{\partial v^2(\vec{x})}{\partial x^1} \quad (4)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y^1} \left( \overbrace{(y^1)^2 + (y^2)^2}^{(2a)} \right) \Big|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^1} \left( -\frac{1}{x^2} \right)}_{=0} + \frac{\partial}{\partial y^2} \left( \overbrace{(y^1)^2 + (y^2)^2}^{(2a)} \right) \Big|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \overbrace{\frac{1}{x^1}}^{(2b)} \right) \quad (5)$$

$$= 2y^2 \Big|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \cdot \left( \frac{-1}{(x^1)^2} \right) = 2v^2(\vec{x}) \left( \frac{-1}{(x^1)^2} \right) = 2 \frac{1}{x^1} \left( -\frac{1}{(x^1)^2} \right) = -\frac{2}{(x^1)^3} \quad (6)$$

# C4 Mehrdimensionale Integration (kartesisch)

C4a

## C4.1 2D Integration über Rechteck

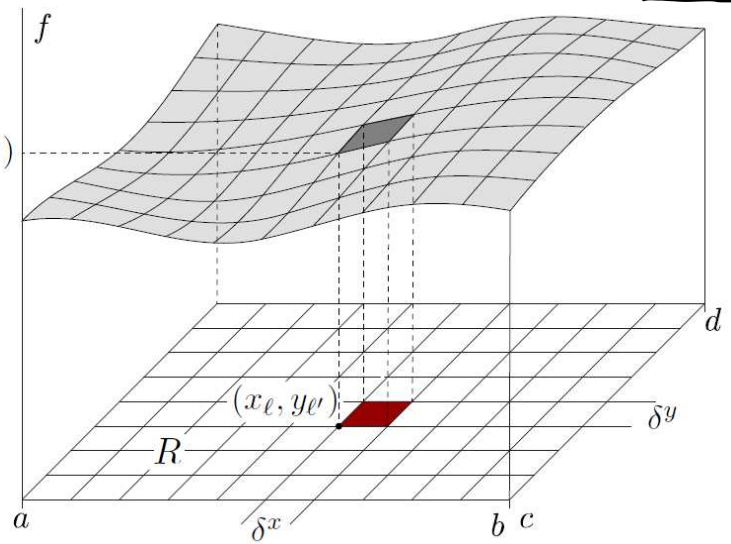
$$f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

Diskretisierungsschritte:

$$\delta^x = \frac{b-a}{N_x}, \quad \delta^y = \frac{d-c}{N_y}$$

$$\text{Volumen} \approx \sum_l \sum_{l'} f(x_l, y_{l'}) \delta^x \delta^y$$



(Riemann-Summe)

Def. v 2D-Integral:

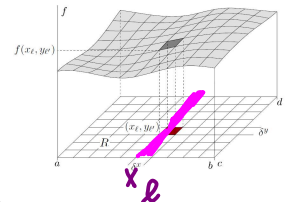
$$\lim_{\delta^x, \delta^y \rightarrow 0} \delta^x \delta^y \sum_l \sum_{l'} f(x_l, y_{l'}) \equiv \int_{[a,b] \times [c,d]} dx dy f(x, y)$$

Integrations-Domäne

## Fubini's Theorem: Integrationsreihenfolge ist egal

C4b

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} dx dy f(x, y) = \lim_{\delta^x \rightarrow 0} \delta^x \sum_l \underbrace{\lim_{\delta^y \rightarrow 0} \delta^y \sum_{l'} f(x_l, y_{l'})}_{\text{1D-Integral, mit } x_l \text{ fest}}$$



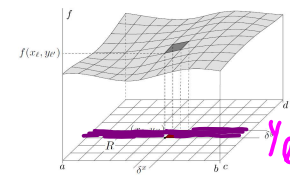
(1)

$$= \lim_{\delta^x \rightarrow 0} \delta^x \sum_l \int_c^d f(x_l, y) dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

Funktion v.  $x_l$ , kann integriert werden

Alternativ:

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} dx dy f(x, y) = \lim_{\delta^y \rightarrow 0} \delta^y \sum_{l'} \underbrace{\lim_{\delta^x \rightarrow 0} \delta^x \sum_l f(x_l, y_{l'})}_{\text{1D-Integral, mit } y_{l'} \text{ fest}}$$



(3)

$$= \lim_{\delta^y \rightarrow 0} \delta^y \sum_{l'} \int_a^b f(x, y_{l'}) dx = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

Funktion v.  $y_{l'}$ , kann integriert werden

Intuitive Begründung:

Zählreihenfolge der Quader in Zeilen oder Spalten ist egal.

Fubini:

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} dx dy f(x, y) = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

(5)

Beispiel

$$f: [0, 2] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

C4c

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = xy + y^2 \quad (1)$$

$$\int_0^2 dx \int_0^1 dy f(x, y) = \int_0^2 dx \int_0^1 dy (xy + y^2) = \int_0^2 dx \left( x \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^1 \quad (2)$$

$$= \int_0^2 dx \left( x \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{5}{3} \quad (3)$$

$$\int_0^1 dy \int_0^2 dx f(x, y) = \int_0^1 dy \int_0^2 dx (xy + y^2) = \int_0^1 dy \left( \frac{1}{2} x^2 y + x y^2 \right) \Big|_0^2 \quad (4)$$

$$= \int_0^1 dy \left( \frac{1}{2} \cdot 4 y + 2 y^2 \right) = \left( 2 \cdot \frac{1}{2} y^2 + 2 \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^1 = 1 \cdot 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \quad (5)$$

Fubini stimmt!

Analog in 3D: 
$$\int_{[a,b] \times [c,d] \times [e,f]} dx dy dz f(x, y, z) = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x, y, z) \quad (6)$$

Reihenfolge dieser Integrale ist beliebig

Wann ist Satz von Fubini nicht anwendbar? Siehe AD-Buch, INFO auf S. 240.

### Integration über allgemeiner Domänen

C4d

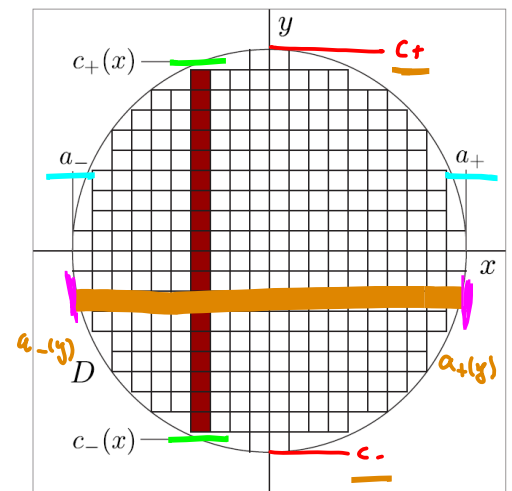
Riemann-Summe:

$$\approx \sum_{a_- < x_k < a_+} \delta^x \cdot \sum_{c_-(x_k) < y_k < c_+(x_k)} \delta^y f(x_k, y_k) \quad (1)$$

Integral v. Funktion  $f(x, y)$  über d. Fläche:

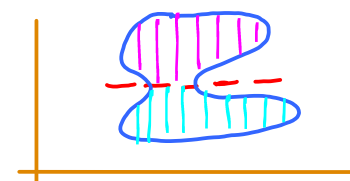
$$\int_D dx dy f(x, y) \equiv \int_{a_-}^{a_+} dx \left[ \int_{c_-(x)}^{c_+(x)} dy f(x, y) \right]$$

$$\text{nach Fubini} = \int_{c_-}^{c_+} dy \left[ \int_{a_-(y)}^{a_+(y)} dx f(x, y) \right]$$



Für das "innere" (zweite) Integral sind die Grenzen abhängig von der "äußeren" (ersten) Integrationsvariable.

Bemerkung:  $c_{\pm}(x)$  bzw.  $a_{\pm}(y)$  müssen eindeutige Funktionen sein; falls sie es nicht sind, hilft Unterteilung des Integrals in mehrere Teile:





## Beispiel: Kreisfläche

C4e

$$A \stackrel{(d.z)}{=} \int_{-R}^R dx \int_{c_-(x)}^{c_+(x)} dy \cdot 1$$

$$= \int_{-R}^R dx [c_+(x) - c_-(x)] \stackrel{(2)}{=} 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2}$$

Substitution:  $x = R \cos t$     Grenzen:  $R = R \cos(0)$   
 Maß:  $\frac{dx}{dt} = -R \sin t \cdot dt$      $-R = R \cos(\pi)$

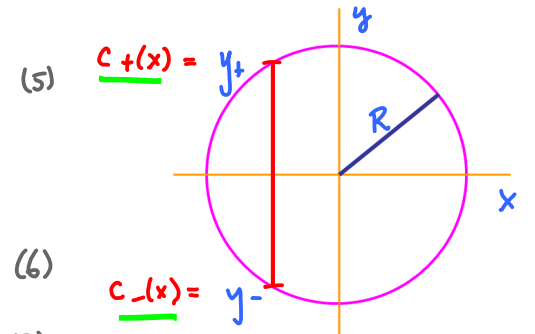
$$A \stackrel{(2)}{=} -2 \int_{\pi}^0 dt (R \sin t) \underbrace{\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 t}}_{R \sqrt{1 - \cos^2 t} = R \sin t}$$

$$= 2 R^2 \int_0^{\pi} dt \underbrace{\sin^2 t}_{\pi/2} \cdot 1 \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \pi R^2$$

Bestimmung der Integrationsgrenzen für y:

(3)  $x^2 + y^2 = R^2$  (1)

(4)  $c_{\pm}(x) = y_{\pm} = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$  (2)



(6)

(7)

(8)

□

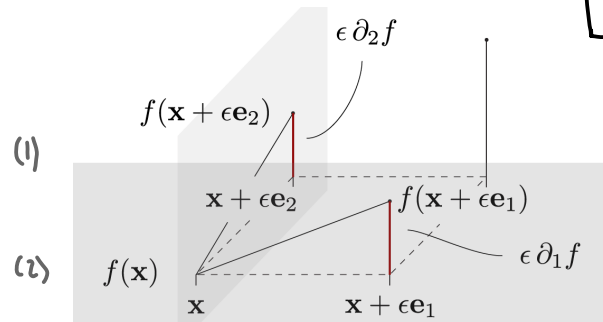
## Zusammenfassung C3: Partielle Ableitungen

ZC3

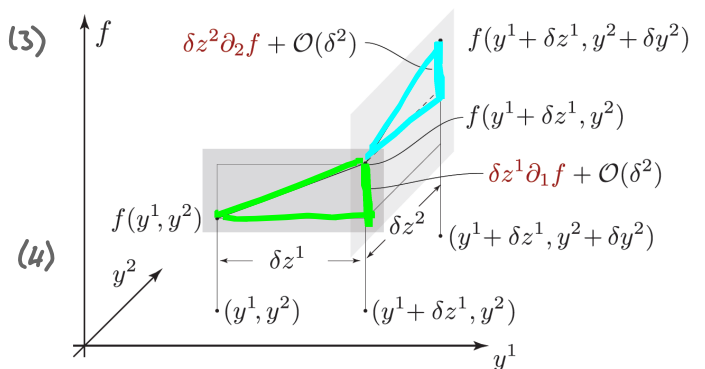
Partielle Ableitung:  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{x} + \delta \vec{e}_i) - f(\vec{x})]$$

$$\equiv \partial_{x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_i f(\vec{x})$$



Satz v. Schwarz:  $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$



$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \vec{y} \mapsto f(\vec{y})$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y})] = \partial_j f(\vec{y}) z^j$$

$\vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d, \vec{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m, \vec{f} \circ \vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

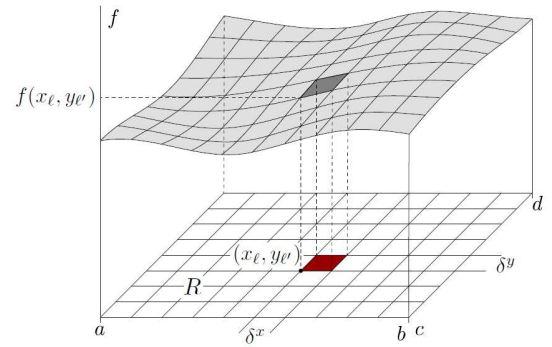
Allgemeine Kettenregel:  $\frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial g^j} \frac{\partial g^j(\vec{x})}{\partial x^k}$   $i = 1, \dots, m$   $k = 1, \dots, n$  (5)

# Zusammenfassung: C4 Mehrdimensionale Integration (Kartesisch)

ZC4a

## Integration in $\mathbb{R}^2$

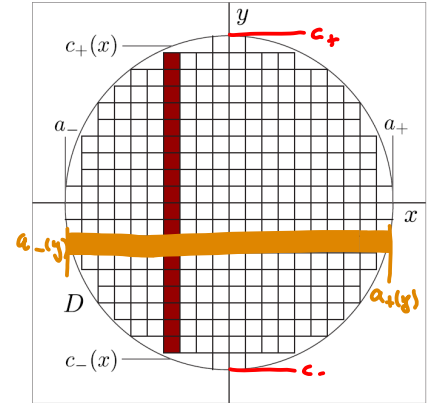
$$\int_a^b dx \int_c^d dy f(x,y) \equiv \lim_{\delta^x, \delta^y \rightarrow 0} \delta^x \delta^y \sum_k \sum_{k'} f(x_k, y_{k'})$$



Fubini: Integrationsreihenfolge ist egal:

$$\int_a^b dx \int_{y_-(x)}^{y_+(x)} dy f(x,y) = \int_{y_a}^{y_b} dy \int_{x_-(y)}^{x_+(y)} dx f(x,y)$$

Für das "innere" (zweite) Integral sind die Grenzen abhängig von der "äußeren"



Analog in 3D:

$$\int_{[a,b] \times [c,d] \times [e,f]} dx dy dz f(x,y,z) = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x,y,z)$$

↪ Reihenfolge dieser Integrale ist beliebig