

L4 Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

(nur in 3 Dimensionen definiert)


L4a

- Zusammenfassung v. Schulwissen
- Geometrische Anschauung
- Komponentendarstellung, Levi-Civita-Symbol

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix}$$

Aus Schule bekannt: (?)

Verknüpfung: $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} \equiv$

zyklisch:  (1)

$$\begin{pmatrix} v^2 w^3 & -v^3 w^2 \\ v^3 w^1 & -v^1 w^3 \\ v^1 w^2 & -v^2 w^1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

- (i) Antisymmetrisch: $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$ (2)
- (ii) Nur senkrechte Anteile tragen bei: $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{v}_\perp \times \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w}_\perp$ (3)
- (iii) Distributiv: $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$ (4)
- (iv) Nicht assoziativ: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ (5)

(Beweise: aus geometrischer Anschauung, siehe unten.)

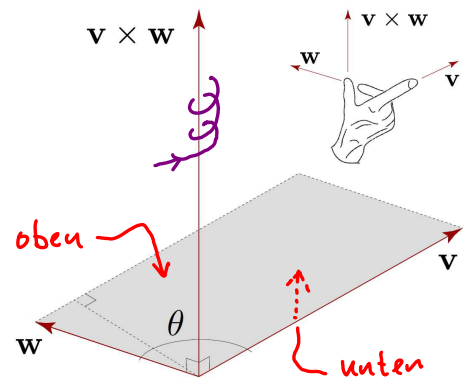
Geometrische Definition

Daumen: $\vec{v} \times \vec{w}$
 Mittelfinger: \vec{w}
 Zeigefinger: \vec{v}

L4b

$\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ ist ein 3-Komponenten-Objekt mit folgenden Eigenschaften:

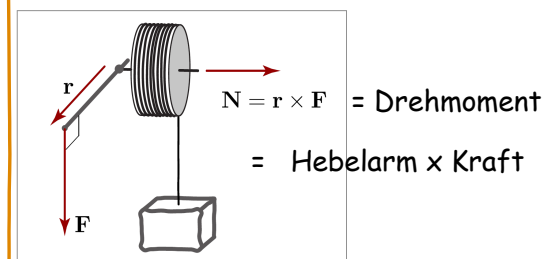
- (i) Betrag: $\|\vec{u}\| = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \equiv \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \theta$ (1)
 Fläche von Parallelogram
- (ii) Richtung: $\vec{v} \times \vec{w}$ steht senkrecht auf der von \vec{v} und \vec{w} aufgespannten Ebene, sodass $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ in dieser Folge ein Rechtssystem bilden. (2)



Anmerkungen:

- $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}$, $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}$
- 'Vektorprodukt beschreibt Drehsinn'
- $\vec{v} \times \vec{w}$ definiert eine 'orientierte Fläche'
- $\vec{v} \times \vec{w}$ ist ein 'Pseudo-Vektor'

Beispiel v. physikalischen Anwendung:



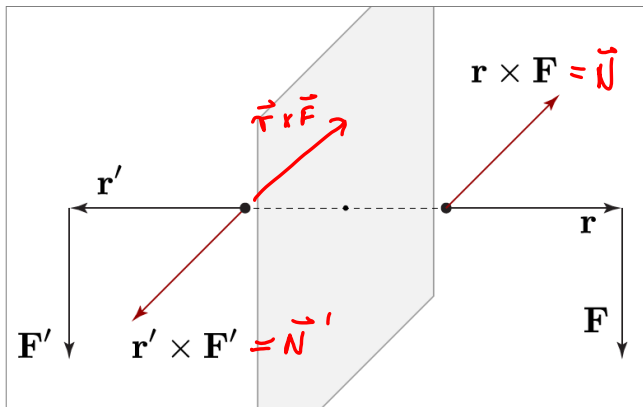
Kreuzprodukt ist kein Vektor, sondern ein 'Pseudovektor'

L4c

Für Vektoren ist Reflexion in der Ebene definiert durch:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \xrightarrow{\text{Reflexion}} \vec{v}' = \vec{v}_{\parallel} - \vec{v}_{\perp}$$

Anteil senkrecht zur Ebene: Vorzeichenwechsel. Anteil parallel zur Ebene: unverändert.



$$\vec{\tau} \rightarrow \vec{\tau}' = -\vec{\tau}$$

$$\vec{F} \rightarrow \vec{F}' = \vec{F}$$

Definition des Drehmoments: $\vec{N} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$

Für Drehmoment ist Reflexion in der Ebene definiert durch:

$$\vec{N} \equiv \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow \vec{N}' \equiv \vec{r}' \times \vec{F}'$$

Offenbar gilt $\vec{N}' = -\vec{N}$ obwohl $\vec{N} = \vec{N}_{\parallel}$ parallel zur Ebene steht!

Also verhält sich das Drehmoment nicht wie ein 'Vektor'. Wird 'Pseudovektor' genannt.

Eigenschaften: diskutiert durch geometrische Anschauung

L4d

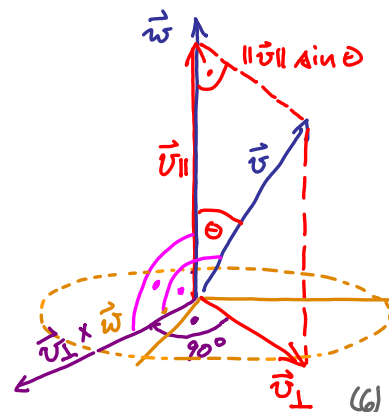
(i) Antisymmetrisch: $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$ (folgt aus rechtshändischer Regel) (1)

(ii) Nur senkrechter Anteil trägt bei: $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{falls } \|\vec{v}\| = 0 \text{ und/oder } \|\vec{w}\| = 0 \quad (2) \\ \text{oder } \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi \Rightarrow \vec{v} \parallel \pm \vec{w} \quad (3) \end{array} \right.$
(Zwei kollineare Vektoren spannen keine Ebene auf.)

Sei $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ Zerlegung v. \vec{v} bezgl. \vec{w}

Dann gilt: $\vec{v} \times \vec{w} = (\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) \times \vec{w} \quad (3)$

$$= \vec{v}_{\perp} \times \vec{w} \quad (4)$$



Merkregel: $\vec{v} \times \vec{w}$ liegt in Ebene \perp zu \vec{w} , um 90 Grad gedreht zu \vec{v}_{\perp} (7)

(iii) Distributivität: $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$ (1)

[aus geometrischer Anschauung]

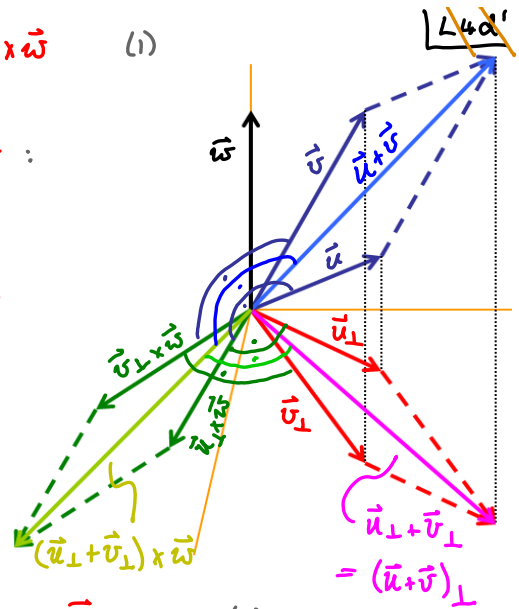
\vec{w} ist ausgezeichnet, zerlege anderen Vektoren bzgl. \vec{w} :

$\vec{u} = \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}$ (2)

$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ (3)

$\vec{u} + \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v})_{\parallel} + (\vec{u} + \vec{v})_{\perp}$ (4)

liegen in Ebene senkrecht zu \vec{w}



In dieser Ebene, $\perp \vec{w}$, liegt:

$\vec{u} \times \vec{w} \stackrel{(c.4)}{=} \vec{u}_{\perp} \times \vec{w}$ um 90 Grad gedreht relativ zu \vec{u}_{\perp} (5)

$\vec{v} \times \vec{w} = \vec{v}_{\perp} \times \vec{w}$ " " \vec{v}_{\perp} (6)

$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v})_{\perp} \times \vec{w}$ " " $(\vec{u} + \vec{v})_{\perp}$ (7)

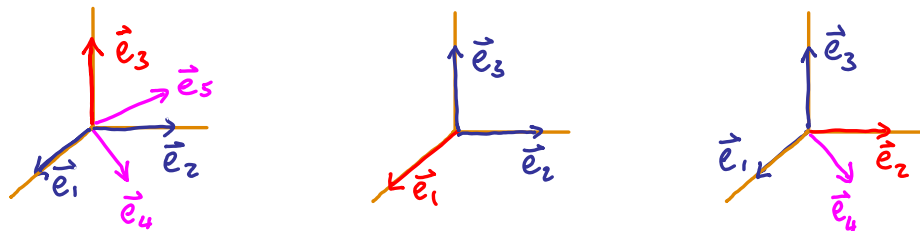
Offensichtlich gilt: $(\vec{u} + \vec{v})_{\perp} \times \vec{w} = \vec{u}_{\perp} \times \vec{w} + \vec{v}_{\perp} \times \vec{w}$ (8)

Also auch: $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$ \square (9)

(iv) Nicht-Assoziativität: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ (1) L4e

Ein Gegenbeispiel genügt:

$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$
 $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$, $\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$ (2)



Nehme:

$\vec{u} = \vec{e}_1$

$\vec{v} = \vec{e}_2$

$\vec{w} = \vec{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$

$\vec{e}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2 - \vec{e}_1)$

$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ (3)

$= (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times \vec{e}_4$ (4)

$= \vec{e}_3 \times \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ (5)

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \times \vec{e}_2)$ (6)

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2 - \vec{e}_1) = \vec{e}_5$ (7)

$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ (8)

$= \vec{e}_1 \times [\vec{e}_2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)]$ (9)

$= \vec{e}_1 \times \frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_2]$ (10)

$= \vec{e}_1 \times \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_3 + \vec{0}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2$ (11)

(7) \neq (11) \Rightarrow (1) (12)

Vektorprodukt in kartesischen Komponenten:

$\begin{matrix} 3 \\ | \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ | \\ 2 \end{matrix}$ L4f

Vektorprodukte der orthonormalen Einheitsvektoren:

Zyklische Reihenfolge:		+	$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$	$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$	$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$	(1)
Antizyklische Reihenfolge:		-	$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$	$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$	$\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$	(2)
Gleiche Indizes:			$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}$	$\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}$	$\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}$	(3)

Kurznotation für (1)-(3): $\vec{e}_i \times \vec{e}_j \stackrel{ES}{=} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \vec{e}_k \quad \left[\stackrel{ES}{=} \epsilon_{ij1} \vec{e}_1 + \epsilon_{ij2} \vec{e}_2 + \epsilon_{ij3} \vec{e}_3 \right]$ (4)

Definition: 'Levi-Civita-Symbol' $\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \neq j, j \neq k, k \neq i \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{" " " " " anti-zyklisch} \\ 0 & \text{falls zwei oder drei Indizes gleich sind} \end{cases}$ (5)

Explizit: $1 = \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{321} = -\epsilon_{213}$ (6)

$0 = \epsilon_{iik} = \epsilon_{iji} = \epsilon_{ikk} = \epsilon_{iij}$ (7)

Beispiel für (4): $\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = \epsilon_{13k} \vec{e}_k = \underbrace{\epsilon_{131}}_0 \vec{e}_1 + \underbrace{\epsilon_{132}}_{-1} \vec{e}_2 + \underbrace{\epsilon_{133}}_0 \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \quad \checkmark$ (8)

Levi-Civita Eigenschaften: - zyklisch invariant: $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki}$ (9)

- total antisymmetrisch: $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$, etc. (10)

Vektorprodukte v. zwei allgemeinen Vektoren: $\vec{v} = \vec{e}_i v^i, \quad \vec{w} = \vec{e}_j w^j$ (1) L4g

$\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} \stackrel{(3)}{=} (\vec{e}_i v^i) \times (\vec{e}_j w^j) = v^i w^j (\underbrace{\vec{e}_i \times \vec{e}_j}_{(f.4) \epsilon_{ijk} \vec{e}_k}) = v^i w^j \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{\equiv u^k} \vec{e}_k = \vec{e}_k u^k$ (2)

Distributivität, \uparrow
komponentenweise

Definition der Koeff. von c

Folglich: $u^k = v^i w^j \epsilon_{ijk}, \quad (\vec{v} \times \vec{w})^k = v^i w^j \epsilon_{ijk}$ (3)

Explizit: $\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2 w^3 - v^3 w^2 \\ v^3 w^1 - v^1 w^3 \\ v^1 w^2 - v^2 w^1 \end{pmatrix}$ (4)

$\left. \begin{matrix} \epsilon_{231} & +1 \\ \epsilon_{321} & -1 \\ \epsilon_{312} & +1 \\ \epsilon_{132} & -1 \\ \epsilon_{123} & +1 \\ \epsilon_{213} & -1 \end{matrix} \right\}$

Anmerkung: bei Rechnungen mit Kreuzprodukt treten manchmal Index-Summationen auf, bei denen beide Summations-Indices unten oder beide oben stehen. Die Einstein-Regel, 'summiere über oben-unten-Paar', läßt sich also nicht streng einhalten. Grund hierfür: Kreuzprodukt ist kein echter Vektor. Macht aber nichts - für Anwendungen des Kreuzprodukts werden wir immer nur mit Orthonormalbasen arbeiten, also ist $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ und 'Index oben' äquivalent zu 'Index unten'.

Zur Kenntnisnahme (nicht klausurrelevant): Kovariante Form des Kreuzprodukts: $\vec{v} \times \vec{w} = v^i w^j \epsilon_{ijl} g^{lk} \vec{e}_k, \quad u^k = v^i w^j \epsilon_{ijl} g^{lk}$ (5)

Siehe AD-Buch, Abschnitt L6.4, Gl. (L183), und für Fortgeschrittene, Abschnitt L10.9, Gl. (L285).

(g.2) ganz explizit:



$$\begin{aligned}
\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} &= (\vec{e}_1 v^1 + \vec{e}_2 v^2 + \vec{e}_3 v^3) \times (\vec{e}_1 w^1 + \vec{e}_2 w^2 + \vec{e}_3 w^3) \\
&= v^1 w^1 (\underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_1}_{=0}) + v^1 w^2 (\underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{=\vec{e}_3}) + v^1 w^3 (\underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{=-\vec{e}_2}) \\
&\quad + v^2 w^1 (\underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_1}_{=-\vec{e}_3}) + v^2 w^2 (\underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_2}_{=0}) + v^2 w^3 (\underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{=\vec{e}_1}) \\
&\quad + v^3 w^1 (\underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}_{=\vec{e}_2}) + v^3 w^2 (\underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_2}_{=-\vec{e}_1}) + v^3 w^3 (\underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_3}_{=0}) \\
&= \underbrace{(v^2 w^3 - v^3 w^2)}_{\equiv u^1} \vec{e}_1 + \underbrace{(v^3 w^1 - v^1 w^3)}_{\equiv u^2} \vec{e}_2 + \underbrace{(v^1 w^2 - v^2 w^1)}_{\equiv u^3} \vec{e}_3 = (g.2)
\end{aligned}$$

Herleitung mittels Levi-Civita & Einstein-Summation ist offenbar viel effizienter und schmerzfreier...



(g.3) ganz explizit:

$$u^i = v^i w^j \epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} v^1 w^1 \overset{0}{\epsilon_{11}} + v^1 w^2 \overset{0}{\epsilon_{12}} + v^1 w^3 \overset{0}{\epsilon_{13}} \\ + v^2 w^1 \overset{0}{\epsilon_{21}} + v^2 w^2 \overset{0}{\epsilon_{22}} + v^2 w^3 \overset{+1}{\epsilon_{23}} \\ + v^3 w^1 \overset{0}{\epsilon_{31}} + v^3 w^2 \overset{-1}{\epsilon_{32}} + v^3 w^3 \overset{0}{\epsilon_{33}} \end{pmatrix} = v^2 w^3 - v^3 w^2$$

Identität:

$$\underbrace{\vec{e}_k \cdot (\vec{e}_i \times \vec{e}_j)}_{(f.4)} = \underbrace{\vec{e}_k \cdot (\epsilon_{ijn} \vec{e}_n)}_{\delta_{kn}} = \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{\epsilon_{kij}} \tag{1}$$

denn Basisvektoren sind orthonormal:

$$\vec{e}_k \cdot \vec{e}_n = \delta_{kn} \tag{2}$$

Identität:

$$\underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{muk}}_{(ES)} = \underbrace{\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}} \tag{3}$$

(ES: implizite Summe über 'Dummy-Index' k, mit i,j,m,n 'frei')

$$= \begin{cases} +1 & \text{falls } i=m, j=n \\ -1 & \text{falls } i=n, j=m \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \tag{4}$$

Explizites Beispiel: sei $i=1, j=2$, mit m, n zunächst 'frei' (1) $\underline{L4j}$

ES

$$\sum_{ijk} \sum_{muk} = \sum_{ij1} \sum_{muk} + \sum_{ij2} \sum_{muk} + \sum_{ij3} \sum_{muk} \quad (2)$$

(f.5)

$$\sum_{12k} \sum_{muk} = \underbrace{\sum_{121} \sum_{muk}}_{=0} + \underbrace{\sum_{122} \sum_{muk}}_{=0} + \underbrace{\sum_{123} \sum_{muk}}_{=1} \quad (3)$$

Nur ein Term überlebt in k-Summe: Summationsindex 'gepinnt' bei $k \notin \{i, j\}$ (4)
hier: $k=3$

(3) (f.5)

$$= \sum_{m=3} = \begin{cases} 1 & \text{falls } m=1, n=2 \\ -1 & \text{falls } m=2, n=1 \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} = \delta_{1m} \delta_{2n} - \delta_{1n} \delta_{2m} \quad (5)$$

konsistent mit (i.4) ✓ 😊

Fazit: $\sum_{ijk} \sum_{muk}$ ist nur dann verschieden von Null, falls freien Indizes vom erstem und zweiten Faktor paarweise gleich sind. Vorzeichen bestimmt durch Zyklizität.

Eigenschaften des Vektorprodukts: alle folgen aus (f.4): $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{ijk} \vec{e}_k$ (1) $\underline{L4k}$

Anti-symmetrisch:
(nicht kommutativ!)

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v} \quad (2)$$

Distributiv:

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} \quad (3)$$

Nicht assoziativ:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{w} \times \vec{v}) \quad (4)$$

'Grassmann-Identität'

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} (\vec{u} \cdot \vec{w}) - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} \quad (5)$$

Eselsbrücke:
BAC-CAB-Identität'
[sprich: 'Bakzap'-Identität]

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Jacobi-Identität:
[zyklisch]

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{0} \quad (6)$$

Lagrange-Identität:

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{t} \times \vec{u}) = (\vec{v} \cdot \vec{t})(\vec{w} \cdot \vec{u}) - (\vec{v} \cdot \vec{u})(\vec{w} \cdot \vec{t}) \quad (7)$$

$\vec{t} = \vec{v}, \vec{u} = \vec{w}$:

$$(\vec{v} \times \vec{w})^2 = \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 \quad (8)$$

Beispiel:
'BAC-CAB-Identität'

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (1) \quad \underline{L48}$$

Herleitung: k-Komponente v. (1):

$$\begin{aligned} \left[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \right]^k &\stackrel{(2a)}{=} a^i (\vec{b} \times \vec{c})^j \varepsilon_{ijk} && \left[(\vec{a} \times \vec{d})^k \stackrel{(4g)}{=} a^i d^l \varepsilon_{ijk} \right. && (2a) \\ &&& \left[(\vec{b} \times \vec{c})^j \stackrel{(4g)}{=} b^m c^n \varepsilon_{mnj} \right. && (2b) \\ &\stackrel{(2b)}{=} a^i (b^m c^n \varepsilon_{mnj}) \varepsilon_{kij} && && (3a) \\ &= a^i b^m c^n [\delta_{mk} \delta_{ni} - \delta_{mi} \delta_{nk}] && && (3b) \\ &= a^i b^k c^i - a^i b^i c^k = b^k (\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) c^k && && (3c) \end{aligned}$$

Kurzversion:

= k-Komponente von (1)

$$\left[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \right]^k = a^i (b^m c^n \varepsilon_{mnj} \varepsilon_{kij}) = b^k (\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) c^k \quad (4)$$

Definition: Spatprodukt:

L49

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \mapsto (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \stackrel{(2)}{=} u^i v^j w^k \varepsilon_{kij} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &= (\vec{e}_i u^i \times \vec{e}_j v^j) \cdot \vec{e}_k w^k = u^i v^j w^k (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k \\ \text{denn:} &&& \stackrel{(2.1)}{\varepsilon_{ijk}} && (2) \end{aligned}$$

Spatprodukt ist
zyklisch invariant:

$$\left. \begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} &\stackrel{(1)}{=} (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} \stackrel{(1)}{=} (\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} \quad (3) \\ &\text{zyklisch vertauscht} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{aber} \\ &\stackrel{(1)}{=} -(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} \\ &\text{antizyklisch:} \end{aligned}$$

$u \rightarrow v$
 $w \leftarrow v$

$$\stackrel{(1)}{=} u^i v^j w^k \varepsilon_{kij} = u^j v^k w^i \varepsilon_{jki} = w^i u^j v^k \varepsilon_{ijk} = (\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} \quad (3)'$$

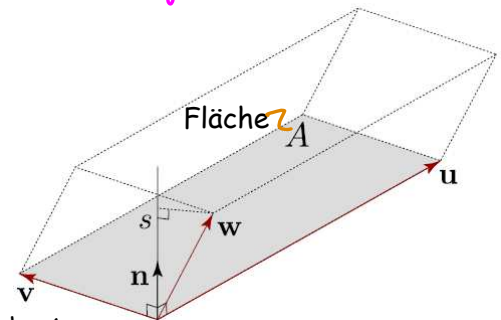
Geometrische Interpretation:

$$|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \text{Volumen v. Parallelepiped} \quad (4)$$

(b.1) Fläche v. Parallelogram: A

$$= (A \hat{n}) \cdot \vec{w} = A s \quad (5)$$

s = Projektion von \vec{w} auf Normalvektor \hat{n} zur Fläche A



Zusammenfassung: L4 Vektorprodukt

ZL4

$$\begin{aligned}
 \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\mapsto \mathbb{R}^3 \\
 (\vec{v}, \vec{w}) &\mapsto \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} \equiv \begin{pmatrix} v^2 w^3 - v^3 w^2 \\ v^3 w^1 - v^1 w^3 \\ v^1 w^2 - v^2 w^1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Geometrische Def:

$$\vec{v} \perp \vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}$$

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \theta$$

Daumen: $\vec{v} \times \vec{w}$ Mittelfinger: \vec{w}
 Zeigefinger: \vec{v}



$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \epsilon_{ijk} \vec{e}_k$$

Levi-Civita: ϵ_{ijk} komplett antisymmetrisch

$$(\vec{v} \times \vec{w})^k = v^i w^j \epsilon_{ijk}$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{muk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$$

Eigenschaften: antisymmetrisch, distributiv, nicht assoziativ, Identitäten...

Spatprodukt: $|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \text{Volumen v. Parallelepipid}$