

L3 Euklidische Geometrie: Längen, Winkel, senkrechte Vektoren...

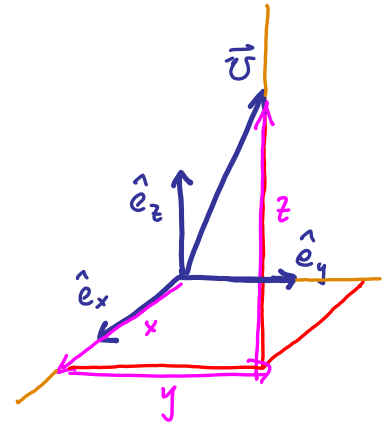
L3.1a

(benötigt neue Struktur über Vektorraumaxiome hinaus)

Sei $\vec{v} = \hat{e}_x x + \hat{e}_y y + \hat{e}_z z$

Länge von \vec{v} nach Pythagoras:

Länge $^2 \equiv |\vec{v}|^2 = \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{\text{quadratisch in Komponenten!}}$



- Für \mathbb{R}^n : Skalarprodukt
- Mathematische Abstraktion: inneres Produkt
- Länge
- Winkel zwischen zwei Vektoren, Orthogonalität
- Orthonormalbasis (alle Basisvektoren sind normiert, und zueinander orthogonal)
- Inneres Produkt, Metrik, kovariante Notation

L3.1 Skalarprodukt in \mathbb{R}^n :

L3.1b

Def: Skalarprodukt ist eine Verknüpfung v. zwei Vektoren in \mathbb{R}^n zu einer reellen Zahl:

Sei $\vec{v} = (v^1, \dots, v^n)^T = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$ $\vec{w} = (w^1, \dots, w^n)^T = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix}$ (1)

Skalarprodukt:

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, Skalar $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \equiv \sum_{ij} v^i \delta_{ij} w^j$ (2)

Notation verdeutlicht, dass diese Zahl von zwei Vektoren abhängt

Kronecker-delta Symbol: $\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$ (3)

$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v^1 w^1 + v^2 w^2 + \dots + v^n w^n = \vec{v} \cdot \vec{w}$ (4)

Beispiel (n=3):

in Physik bevorzugte Notation

$\langle (1, 2, 0)^T, (3, -1, 4)^T \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 = 1$ (5)

Eigenschaften des Skalarprodukts:

L3.1c

- (i) Symmetrie: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ (1)
- (ii) Linearität bzgl. Vektoraddition: $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ (2)
- (iii) Linearität bzgl. Skalarmultiplikation: $\langle a \vec{v}, \vec{w} \rangle = a \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ (3)
- (iv) Positiv definit: $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0 \quad \forall \vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0}$ (4)
- $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$ (5)
'wenn, und nur wenn'

Eigenschaften (i) bis (iv) gelten offensichtlich:

- (i) Symmetrie: per Konstruktion
 - (ii) & (iii) Linearität: denn Skalarprodukt ist linear in Komponenten v. \vec{v} und \vec{w}
 - (iv) Positiv definit: denn $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \stackrel{(b.2)}{=} \sum_{i=1}^n (v_i)^2 \geq 0$ (6)
- \mathbb{R}^n ausgestattet mit Skalarprodukt heißt 'Euklidischer Raum': $(\mathbb{R}^n, \cdot) = E^n$ (7)

[derselbe Name wie für Vektorraum plus Ursprung! Grund: sie sind isomorph!, siehe AD-L3.3]

L3.2 Norm, Orthogonalität

L3.2a

Definition: Norm [Länge] (Skalarprodukt zweier gleichen Vektoren)

- $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (1)
- $\vec{v} \mapsto \|\vec{v}\| \equiv \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$ (2)
- $= \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ (2)
- $\stackrel{(1b.2)}{=} \sqrt{v^1 v^1 + \dots + v^n v^n} \equiv |\vec{v}|$ (3)
Länge nach Pythagoras
alternative Notation für Norm in \mathbb{R}^n

- Es gilt: $\| a \vec{v} \| \stackrel{(1c.3)}{=} \sqrt{a^2 (v^1 v^1 + \dots + v^n v^n)} = |a| \|\vec{v}\|$ (4)
- $| \cdot | = \text{Betrag: } |a| = \begin{cases} +a & \text{falls } a > 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases} = a \cdot \text{sgn}(a)$ (5)
sign of a = Vorzeichen von a

Norm beantwortet die Frage: 'wie lang ist ein Vektor?'

Skalarprodukt beantwortet die Frage: 'wie parallel sind zwei Vektoren?'

Cauchy-Schwarz Ungleichung (CSU)

L3.2b

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$$

(1)

Beweis der CSU: Sei $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$ (ansonsten ist CSU trivial erfüllt)

Betrachte $0 \leq \langle \vec{v} - a\vec{w}, \vec{v} - a\vec{w} \rangle$ (2) mit $a = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{w}\|^2}$ (Skalare) (3)

[Um die Struktur der folgenden Formeln zu verdeutlichen, verwenden wir für den klobigen Quotienten eine Abkürzung, a.]

$$\stackrel{(L3.1c2,3)}{=} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - \underbrace{a\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - a\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}_{(1.c1): 2a\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle} + a^2 \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle$$
 (4)

$$\stackrel{(3)}{=} \|\vec{v}\|^2 - 2 \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{w}\|^2} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2}{\|\vec{w}\|^4} \|\vec{w}\|^2$$
 (5)

$$0 \leq \|\vec{v}\|^2 - \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2}{\|\vec{w}\|^2}$$
 (6)

Umstellen:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 \leq \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \quad (7) \quad \sqrt{(7)} \Rightarrow \text{CSU } \checkmark$$

Geometrische Interpretation der CSU:

L3.2c

Für 'kolineare', d.h. 'parallele' Vektoren, $\vec{w} = \lambda \vec{v}$ gilt Gleichheitszeichen in CSU: (1)

Check: $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| = |\lambda \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle| = |\lambda| \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}\| \|\lambda \vec{v}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$ (2)

Umkehrschluss: $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| < \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \Rightarrow \vec{v}, \vec{w}$ sind nicht 'parallel'. (3)

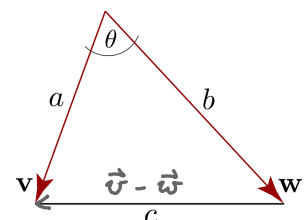
Def: 'Winkel' zwischen Vektoren $\omega(\vec{v}, \vec{w}) \equiv \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}$ (4) CSU (e.1) $\in [-1, +1]$
 $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = \theta$ falls $\vec{v} = -\vec{w} + \vec{w}$

Begründung: einerseits gilt $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{v} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w} \rangle \stackrel{(1c.1)}{=} 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ (5)

andererseits gilt, aus geometrischer Anschauung in 2 Dimension:

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos \theta$$
 (6) 'Cosinus-Satz'

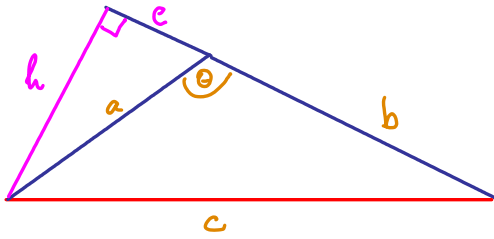
vergleiche (5), (6): $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = ab \cos \theta = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta$ (7)



Geometrischer Beweis des Cosinus-Satz

L3.2d

$\theta > \pi/2$



$$e/a = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \quad (1)$$

$$e = -a \cos\theta \quad (2)$$

$$a^2 = h^2 + e^2 \quad (3)$$

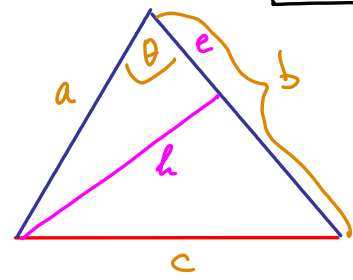
$$c^2 = h^2 + (e+b)^2 \quad (4)$$

$$= h^2 + e^2 + 2eb + b^2 \quad (5)$$

$$\stackrel{(3)}{=} a^2 + 2eb + b^2 \quad (6)$$

$$\stackrel{(1)}{=} a^2 - 2ab \cos\theta + b^2 \quad (7)$$

$\theta < \pi/2$



$$e/a = \cos\theta \quad (1)$$

$$e = a \cos\theta \quad (2)$$

$$a^2 = h^2 + e^2 \quad (3)$$

$$c^2 = h^2 + (b-e)^2 \quad (4)$$

$$= h^2 + b^2 - 2eb + e^2 \quad (5)$$

$$\stackrel{(3)}{=} a^2 - 2eb + b^2 \quad (6)$$

$$\stackrel{(1)}{=} a^2 - 2ab \cos\theta + b^2 \quad (7)$$

Def. Einheitsvektor

(wir nutzen 'Hut' für Einheitsvektoren)

Für $\vec{w} \in \mathbb{R}^n, \vec{w} \neq 0$

hat $\hat{w} \equiv \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$

Norm $\|\hat{w}\| = 1 \quad (1)$

'normiere einen Vektor' = 'bilde kollinearen Einheitsvektor', kollinear zu \vec{w}

Falls $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ werden sie 'orthogonale Vektoren' genannt:

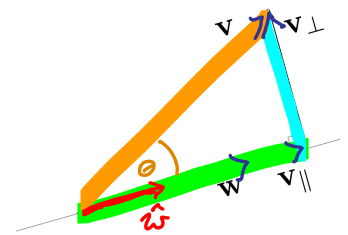
$[\theta = \pi/2 \text{ in (2d.1)}]$

Gegeben: zwei Vektoren \vec{v}, \vec{w} ,

Gesucht: 'Zerlegung' von \vec{v} bezüglich \vec{w} :

$$\vec{v} \stackrel{(s)}{=} \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \quad \text{mit} \quad \vec{v}_{\parallel} \parallel \vec{w}, \quad \vec{v}_{\perp} \perp \vec{w} \quad (4)$$

$$\vec{v} \perp \vec{w} \quad (2)$$



'Projektion': $\vec{v}_{\parallel} = \hat{w} a \quad (5)$

ist zu bestimmen

'Orthogonales Komplement': $\vec{v}_{\perp} \stackrel{(4)}{=} \vec{v} - \vec{v}_{\parallel} \quad (6)$

Forderung: $\vec{v}_{\perp} \perp \vec{w} \Rightarrow 0 \equiv \langle \hat{w}, \vec{v}_{\perp} \rangle \stackrel{(6)}{=} \langle \hat{w}, \vec{v} \rangle - \underbrace{\langle \hat{w}, \hat{w} \rangle}_{(1) \equiv 1} a \Rightarrow a = \langle \hat{w}, \vec{v} \rangle \quad (7)$

Projektion: $\vec{v}_{\parallel} \stackrel{(5,7)}{=} \hat{w} \langle \hat{w}, \vec{v} \rangle \stackrel{(1)}{=} \hat{w} \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{w}\|} \stackrel{(1)}{=} \hat{w} \|\vec{v}\| \cos\theta \quad (8)$

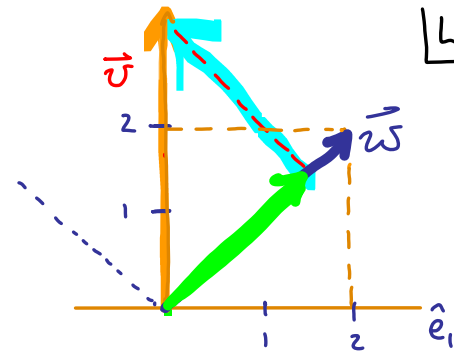
Orthogonales Komplement: $\vec{v}_{\perp} \stackrel{(6,8)}{=} \vec{v} - \hat{w} \langle \hat{w}, \vec{v} \rangle \quad (9)$ [entspricht geometrischer Anschauung]

Beispiel (Selbststudium):

L3.2f

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Aufgabe: Zerlege $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ (2)



Strategie: berechne zunächst $\|\vec{w}\|$, \hat{w} , $\langle \hat{w}, \vec{v} \rangle$:

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \hat{w} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\langle \hat{w}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

$$\vec{v}_{\parallel} \stackrel{(e. 3)}{=} \langle \hat{w}, \vec{v} \rangle \hat{w} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark \quad \|\vec{v}_{\parallel}\| = \frac{3}{2} \sqrt{1+1} = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

$$\vec{v}_{\perp} \stackrel{(e. 6)}{=} \vec{v} - \vec{v}_{\parallel} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark \quad \|\vec{v}_{\perp}\| = \frac{3}{2} \sqrt{1+1} = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

entspricht der Erwartung aus der Skizze !

Check: $\|\vec{v}_{\parallel}\|^2 + \|\vec{v}_{\perp}\|^2 = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{9}{2}} = 3 = \|\vec{v}\|^2 \quad (7)$

Orthonormalbasis

L3.2g

Def: der Satz v. Vektoren $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$

- ist 'orthogonal' falls $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ (1)

- ist 'orthonormal' falls (d.h. orthogonal und normiert) $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ (2)

- bildet eine 'Orthonormalbasis' falls er orthonormal und vollständig ist.

Unsere Notationskonvention für Orthonormalbasis:

$$\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}, \quad \langle \vec{e}'_i, \vec{e}'_j \rangle = \delta_{ij} \quad (3)$$

[manchmal auch ohne ']

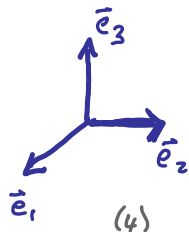
Kanonisches Beispiel: (L2.5h.2)

Jede rotierte Version von (4), z.B.:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0)^T$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0)^T$$

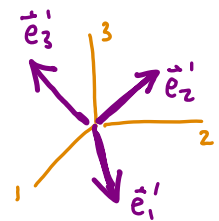
$$\vec{e}_3 = (0, 0, 1)^T$$



$$\vec{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0)^T$$

$$\vec{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (-1, 1, 1)^T$$

$$\vec{e}'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, -1, 2)^T$$



Berechnung der Komponenten bezüglich einer Orthonormalbasis

L3.zh

Gegeben eine Orthonormalbasis $\{\vec{e}'_i\}$ für \mathbb{R}^n , und ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Frage: wie lauten die Komponenten seiner Zerlegung nach dieser Basis: $\vec{x} = \vec{e}'_i x^i$? (1)

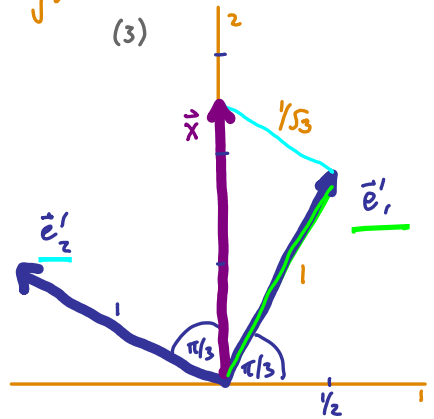
Strategie: 'projiziere' auf Basisvektoren: $\langle \vec{e}'_j, \vec{x} \rangle = \langle \vec{e}'_j, \vec{e}'_i \rangle x^i = x^j$ (2)

Zusammengefasst: $\vec{x} \stackrel{(1)}{=} \vec{e}'_i x^i \stackrel{(2)}{=} \sum_i \vec{e}'_i \langle \vec{e}'_i, \vec{x} \rangle$ (3)

[Indexstellung inkonsistent! Reparatur: siehe (3b.6)]

Beispiel: Betrachte eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^2 :

$\vec{e}'_1 = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})^T$, $\vec{e}'_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}, 1)^T$, $\langle \vec{e}'_i, \vec{e}'_j \rangle_{\mathbb{R}^2} = \delta_{ij}$ (4)



Finde die Komponenten von $\vec{x} = (0, \frac{2}{\sqrt{3}})^T = \vec{e}'_i x^i$ bezüglich dieser Basis! (5)

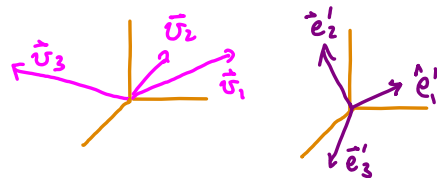
$x^1 \stackrel{(5)}{=} \langle \vec{e}'_1, \vec{x} \rangle_{\mathbb{R}^2} = \langle \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})^T, (0, \frac{2}{\sqrt{3}})^T \rangle_{\mathbb{R}^2} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 1$ (6)

$x^2 \stackrel{(5)}{=} \langle \vec{e}'_2, \vec{x} \rangle_{\mathbb{R}^2} = \langle \frac{1}{2}(-\sqrt{3}, 1)^T, (0, \frac{2}{\sqrt{3}})^T \rangle_{\mathbb{R}^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (7)

Gram-Schmidt-Verfahren

L3.zi

Gegeben einen Satz von Vektoren, $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ linear unabhängig, aber nicht orthogonal, nicht normiert



Konstruiere daraus eine orthonormalen Satz, $\{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}$, $\langle \vec{e}'_i, \vec{e}'_j \rangle_V = \delta_{ij}$ (q.3) (1)
mit demselben Span: $\text{span}\{\vec{e}'_j\} \equiv \text{span}\{\vec{v}_j\}$

Strategie: orthogonalisiere, normalisiere, und wiederhole das iterativ:

$\vec{v}_{1,\perp} \equiv \vec{v}_1$, $\vec{e}'_1 \equiv \frac{\vec{v}_{1,\perp}}{\|\vec{v}_{1,\perp}\|}$ (2)

(e.g) subtrahiere Anteil || zu \vec{e}'_1
 $\vec{v}_{2,\perp} \equiv \vec{v}_2 - \vec{e}'_1 \langle \vec{e}'_1, \vec{v}_2 \rangle_V$, $\vec{e}'_2 \equiv \frac{\vec{v}_{2,\perp}}{\|\vec{v}_{2,\perp}\|}$ ($\perp \vec{e}'_1$) (3)

(e.g)
 $\vec{v}_{3,\perp} \equiv \vec{v}_3 - \vec{e}'_1 \langle \vec{e}'_1, \vec{v}_3 \rangle_V - \vec{e}'_2 \langle \vec{e}'_2, \vec{v}_3 \rangle_V$, $\vec{e}'_3 \equiv \frac{\vec{v}_{3,\perp}}{\|\vec{v}_{3,\perp}\|}$ ($\perp \vec{e}'_1, \perp \vec{e}'_2$) (4)

(e.g)
 $\vec{v}_{n,\perp} \equiv \vec{v}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \vec{e}'_i \langle \vec{e}'_i, \vec{v}_n \rangle_V$, $\vec{e}'_n \equiv \frac{\vec{v}_{n,\perp}}{\|\vec{v}_{n,\perp}\|}$ ($\perp \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_{n-1}$) (5)

L3.3 Innere Produkträume (das werden Sie später brauchen)

L3.3a

[Notation in L3.3: Hut auf \hat{u}, \hat{w} bedeutet nicht Einheitsvektor, sondern Element v. allgemeinem Vektorraum V.]

Verallgemeinerung des Skalarprodukts für allgemeinen \mathbb{R} -Vektorraum V ('reeller Vektorraum'):

'Inneres Produkt' ist eine bilineare Abbildung von zwei Vektoren auf eine Zahl, (1)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_V: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\hat{u}, \hat{v}) \mapsto \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_V \quad (\text{Skalar}) \quad (2)$$

mit folgenden Eigenschaften [identisch zu Seite (L3.1c)]:

(i) Symmetrie: $\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_V = \langle \hat{v}, \hat{u} \rangle_V \quad (3)$

(ii) Linearität bzgl. Vektoraddition: $\langle \hat{u} + \hat{v}, \hat{w} \rangle_V = \langle \hat{u}, \hat{w} \rangle_V + \langle \hat{v}, \hat{w} \rangle_V \quad (4)$

(iii) Linearität bzgl. Skalarmultiplikation: $\langle a \hat{u}, \hat{w} \rangle_V = a \langle \hat{u}, \hat{w} \rangle_V \quad (5)$

(iv) Positiv definit: $\langle \hat{v}, \hat{v} \rangle_V > 0 \quad \forall \hat{v} \in V, \hat{v} \neq 0 \quad (6)$

$$\langle \hat{v}, \hat{v} \rangle_V = 0 \iff \hat{v} = \hat{0} \quad (7)$$

'wenn, und nur wenn'

Vektorraum ausgestattet mit innerem Produkt, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, heißt 'Euklidischer Vektorraum'.

[schon wieder derselbe Name wie vorhin! Grund: sie sind isomorph!, siehe AD-L3.3, Seite 47]

In Beispielen der folgenden Seiten: $V = \mathbb{E}^2, \quad \langle \hat{u}, \hat{w} \rangle_{\mathbb{E}^2} = \|\hat{u}\| \|\hat{w}\| \cos(\angle(\hat{u}, \hat{w})) = \text{geometrische Def.} \quad (8)$

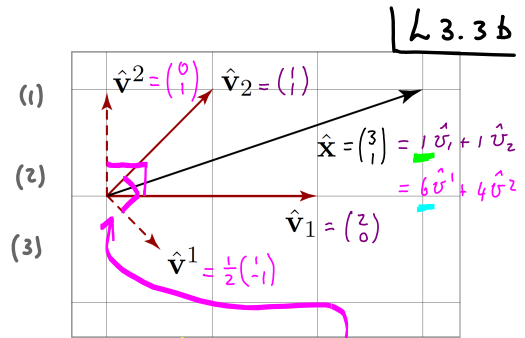
In Standardbasis, mit $\hat{u} = \hat{e}_i \tilde{u}^i \xrightarrow{\phi} \begin{pmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^2 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w}^1 \\ \tilde{w}^2 \end{pmatrix} = \tilde{u}^1 \tilde{w}^1 + \tilde{u}^2 \tilde{w}^2 \quad (9)$

Nicht-orthonormale Basis

Betrachte Basis $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ mit $\langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle_V \neq \delta_{ij}$

Jeder Vektor kann entwickelt werden als $\hat{x} = \hat{v}_i x^i$

aber (L3.2h.2) gilt nicht: $\langle \hat{v}_j, \hat{x} \rangle = \langle \hat{v}_j, \hat{v}_i \rangle x^i \neq x^j$
denn mehr als ein Basisvektor hat \hat{v}_i -Richtung!



Definiere eine zweite, 'duale' Basis, $\{\hat{v}^1, \dots, \hat{v}^n\}$ mit Eigenschaft $\langle \hat{v}^i, \hat{v}_j \rangle_V = \delta^i_j \quad (4)$

(Wie findet man sie? Siehe L3.3d) Nur einer von ihnen hat Anteil in \hat{v}_i -Richtung, nämlich \hat{v}^i !

Nomenklatur zur Unterscheidung: Index unten: 'kovariant', Index oben: 'kontravariant'

Jeder Vektor kann entwickelt werden als $\hat{x} = \hat{v}_i x^i = x_j \hat{v}^j \quad (5)$

'Basis: kovariant' 'duale Basis: kontravariant'
'Komponenten: kontravariant' 'duale Komponenten:'

Rezept für Berechnung d. Komponenten:

kontravariant: $\langle \hat{v}^j, \hat{x} \rangle_V \stackrel{(5)}{=} \langle \hat{v}^j, \hat{v}_i \rangle_V x^i \stackrel{(4)}{=} \delta^j_i x^i = x^j \quad (6) \implies \hat{x} \stackrel{(5,6)}{=} \hat{v}_i \langle \hat{v}^i, \hat{x} \rangle_V \quad (7)$

kovariant: $\langle \hat{x}, \hat{v}_i \rangle_V \stackrel{(5)}{=} x_j \langle \hat{v}_j, \hat{v}_i \rangle_V \stackrel{(4)}{=} x_j \delta^j_i = x_i \quad (8) \implies \hat{x} \stackrel{(5,8)}{=} \langle \hat{x}, \hat{v}_j \rangle_V \hat{v}^j \quad (9)$
Verallgemeinerungen von (2h.3)

In Skizze, $V = \mathbb{E}^2$: $x^1 = \langle \hat{v}^1, \hat{x} \rangle_{\mathbb{E}^2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq x_1 = \langle \hat{x}, \hat{v}_1 \rangle_{\mathbb{E}^2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 6$ nicht gleich! (8)

Metrik, inverse Metrik

Gegeben (kovariante) Basis, wie findet man (kontravariante) duale Basis?
Berechne zunächst 'Metrik' und 'inverse Metrik'!

Definition: 'Metrik' g_{ij} : (innere Produkte aller kov. Basisvektoren)

$$i, j = 1, \dots, n: \quad g_{ji} \equiv \langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle_V \stackrel{(a.3)}{=} g_{ij} \quad (\text{symmetrisch}) \quad (1)$$

Metrik beschreibt 'Geometrie' der (kovarianten) Basis:

- Längen: $\|\hat{v}_i\| = \sqrt{\langle \hat{v}_i, \hat{v}_i \rangle_V} = \sqrt{g_{ii}} \quad (2)$

- Winkel: $\omega(\hat{v}_i, \hat{v}_j) = \frac{\langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle_V}{\|\hat{v}_i\| \|\hat{v}_j\|} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}} \quad (3)$

Definition: 'inverse Metrik' $g^{ij} = g^{ji}$ (symmetrisch) (4)

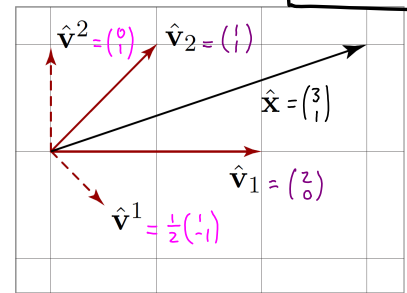
erfüllt $g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij} \iff g^{jk} g_{ki} = \delta_{ij} \quad (5)$

(Wie findet man inverse Metrik? Vorlesung 13, L5: Matrixinvertierung)

4 Versionen des Kronecker-delta-Symbols:

$$\delta^{ij} \equiv \delta_i^j \equiv \delta_j^i \equiv \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad (6)$$

L 3.3c



$$g_{11} = \langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$g_{12} = \langle \hat{v}_1, \hat{v}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$g_{21} = \langle \hat{v}_2, \hat{v}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$g_{22} = \langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g_{11} g^{11} + g_{12} g^{21} = 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 = \delta_1^1$$

$$g_{11} g^{12} - g_{12} g^{22} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot 1 = 0 = \delta_1^2$$

$$g_{21} g^{11} + g_{22} g^{21} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 = \delta_2^1$$

$$g_{21} g^{12} + g_{22} g^{22} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot 1 = 1 = \delta_2^2$$

Bezug zwischen ko- und kontravarianten Basisvektoren / Komponenten

L 3.3d

$\{\hat{v}_j\}$ sei gegeben. Konstruktion von $\{\hat{v}^i\}$: $\hat{v}^i \equiv g^{ij} \hat{v}_j \quad (1)$

Check: erfüllt diese Konstruktion die Forderung (b.4)? Ja! Denn

$$\langle \hat{v}^i, \hat{v}_j \rangle_V \stackrel{(1)}{=} g^{ik} \langle \hat{v}_k, \hat{v}_j \rangle_V \stackrel{(c.1)}{=} g^{ik} g_{kj} \stackrel{(c.5)}{=} \delta_{ij} \quad (b.4) \quad (2)$$

Wie lautet Metrik der (kontravarianten) dualen Basis?

$$\langle \hat{v}^i, \hat{v}^j \rangle_V \stackrel{(1)}{=} g^{ik} \langle \hat{v}_k, \hat{v}^j \rangle_V \stackrel{(b.4)}{=} g^{ik} \delta_{kj} = g^{ij} \quad \text{inverse} \quad (3)$$

Umkehrung von (1): $g_{ji} \hat{v}^i \stackrel{(1)}{=} g_{ji} g^{ik} \hat{v}_k \stackrel{(c.5)}{=} \delta_j^k \hat{v}_k = \hat{v}_j \quad (4)$

Analog für ko- und kontravar. Komponenten v. $\hat{x} \stackrel{(b.5)}{=} \hat{v}_j x^j = x_i \hat{v}^i \quad (5)$

Es gilt: $x_i \stackrel{(b.6)}{=} \langle \hat{v}_i, \hat{x} \rangle \stackrel{(5)}{=} \langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle x^j \stackrel{(c.1)}{=} g_{ij} x^j \quad (6)$

Umkehrung von (6): $g^{ji} x_i \stackrel{(6)}{=} g^{ji} g_{ik} x^k \stackrel{(c.1)}{=} \delta_j^k x^k = x^j \quad (7)$

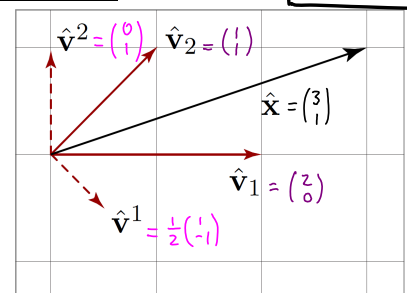
Zusammengefasst:

$$\hat{v}_j \stackrel{(3)}{=} g_{ji} \hat{v}^i = \hat{v}^i g_{ij} \quad (8) \quad x_i \stackrel{(6)}{=} g_{ij} x^j = x^j g_{ji} \quad (8)$$

$$\hat{v}^i \stackrel{(1)}{=} g^{ij} \hat{v}_j = \hat{v}_j g^{ji} \quad (9) \quad x^j \stackrel{(7)}{=} g^{ji} x_i = x_i g^{ij} \quad (9)$$

' g_{ij} zieht Index runter'

' g^{ij} zieht Index hoch'



$$\hat{v}^1 \stackrel{(1)}{=} g^{11} \hat{v}_1 + g^{12} \hat{v}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{v}^2 \stackrel{(1)}{=} g^{21} \hat{v}_1 + g^{22} \hat{v}_2 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{v}_1 \stackrel{(6)}{=} g_{11} \hat{v}^1 + g_{12} \hat{v}^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{v}_2 \stackrel{(6)}{=} g_{21} \hat{v}^1 + g_{22} \hat{v}^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Isomorphismus: $V \cong \mathbb{R}^n$

L3.3e

Entwicklung v. Vektoren in $\hat{V} \xleftrightarrow{\phi_{\hat{v}}} \text{Spaltenvektoren in } \mathbb{R}^n$:

$$\hat{x} = \hat{v}_i x^i \iff \underline{\hat{x}} = (x^1, \dots, x^n)^T, \quad (1)$$

$$\hat{y} = \hat{v}_j y^j \iff \underline{\hat{y}} = (y^1, \dots, y^n)^T \quad (2)$$

Inneres Produkt in V : \iff Verallgemeinertes Standardskalarprodukt in \mathbb{R}^n

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_V \stackrel{(1,2)}{=} x^i \langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle_V y^j = x^i g_{ij} y^j \equiv \langle \underline{\hat{x}}, \underline{\hat{y}} \rangle_{\mathbb{R}^n} \quad (3)$$

$$\stackrel{(c.1)}{=} g_{ij} \stackrel{(d.g)}{=} x^i y_i \stackrel{(d.g)}{=} x_j y^j \quad \text{'verstecke' Metrik durch Indexrunterziehen} \quad (4)$$

Rechnungen in V können somit als Rechnungen in \mathbb{R}^n ausgeführt werden. Grundlage für Numerik!

Metrik ist 'trivial' falls $\langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle_V = g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies$ Orthonormalbasis! (5)

Dann entspricht $\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_V$ dem Standardskalarprodukt in \mathbb{R}^n : $\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_V \stackrel{(3,5)}{=} x^i \delta_{ij} y^j = \sum_i x^i y^i = (1b.2) = (1b.4)$ (6)

Für Orthonormalbasis, mit $g_{ij} = \delta_{ij}$, $g^{ij} \stackrel{(c.5)}{=} \delta^{ij}$, ist oben/unten Unterscheidung nicht nötig,

denn Basis und duale Basis sind identisch: $\hat{v}^i \stackrel{(d.g)}{=} \delta^{ij} \hat{v}_j = \hat{v}_i$ (7) $x_i \stackrel{(d.g)}{=} \delta_{ij} x^j = x^i$ (8)

Kovariante Notation: allgemeine Anmerkungen

L3.3f

Kovariante Notation ist für viele Bereiche der Physik wichtig [Relativitätstheorie, Teilchenphysik, Quanteninformationstheorie...].

Sie ist auch hilfreich, die mathematische Struktur solcher physikalischen Theorien besser zu verstehen. Manche Objekte, die auf den ersten Blick 'Vektoren' zu sein scheinen, haben bei genauer Betrachtung eine kompliziertere mathematische Struktur: kovariante Notation bringt diese zum Vorschein. [Mehr dazu: siehe AD-Buch, Kapitel L10, insbesondere Abschnitt L10.2, 'Dual space', z.B. INFOs auf S. 152, 156.]

Für die meisten der Themen, die in einführenden Physiklehrbüchern behandelt werden, wird eine Orthonormalbasis benutzt. Dann ist kovariante Notation nicht essentiell. Folglich wird sie in solchen Lehrbüchern auch nicht benutzt. Allerdings wird ihre spätere Nutzung bei fortgeschrittenen Themen dann als Hürde empfunden.

Die Index-Philosophie der Rechenmethoden-Vorlesung ist 'radikale Rechtzeitigkeit': je früher man kovariante Notation lernt, je besser! Folglich führen wir sie von Beginn an ein und nutzen sie durchwegs konsequent.

Wem das zu umständlich erscheint, kann, beim Rechnen bezüglich einer Orthonormalbasis, kovariante Notation getrost ignorieren: einfach alle Indizes unten schreiben! Allerdings verzichtet man dadurch auf das Verstehen mancher mathematischer Zusammenhänge, die später bei fortgeschrittenen Themen nützlich werden!

Zusammenfassung L3

ZL3a

Euklidische Vektorräume (V: reeller Vektorraum)

Inneres Produkt: $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ↖ Zahl

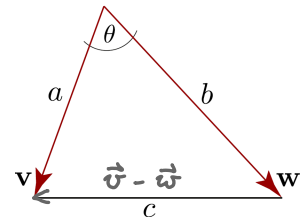
(i) Symmetrie, (ii-iii) Linearität bzgl. + und • (iv) Positiv definit

Wichtigstes Beispiel: Skalarprodukt in \mathbb{R}^n

• : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \equiv \sum_{i=1}^n u_i v_i = u^1 v^1 + \dots + u^n v^n$

Norm: $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}, \vec{v} \mapsto \|\vec{v}\| \equiv \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$

Cauchy-Schwarz Ungleichung (CSU): $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$

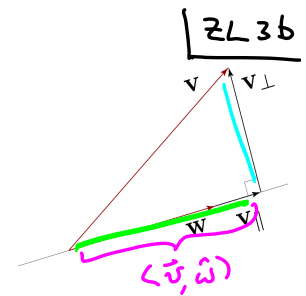


Winkel: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \equiv \cos(\angle(\vec{v}, \vec{w})) \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$

Einheitsvektor: $\hat{w} \equiv \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$

'Projektion' v. \vec{v} auf \vec{w} : $\vec{v}_{\parallel} \equiv \hat{w} \langle \hat{w}, \vec{v} \rangle$ ($\parallel \vec{w}$)

'Orthogonales Komplement' zu \vec{w} : $\vec{v}_{\perp} \equiv \vec{v} - \hat{w} \langle \hat{w}, \vec{v} \rangle$ ($\perp \vec{w}$)



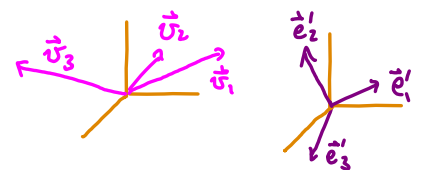
Orthonormalbasis: vollständig, normiert, orthogonal: $\{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}, \langle \vec{e}'_i, \vec{e}'_j \rangle = \delta_{ij}$

Zerlegung nach Komponenten in Orthonormalbasis: $\vec{x} = \vec{e}'_i x^i, x^i = \langle \vec{e}'_i, \vec{x} \rangle$

Gram-Schmidt-Verfahren:

liefert orthonormale Vektoren mit demselben Span:

$\text{span} \{ \vec{e}'_j \} \equiv \text{span} \{ \vec{v}_j \}$



$\vec{v}_{1,\perp} \equiv \vec{v}_1, \vec{e}'_1 \equiv \frac{\vec{v}_{1,\perp}}{\|\vec{v}_{1,\perp}\|}$
 $\vec{v}_{j,\perp} \equiv \vec{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \vec{e}'_i \langle \vec{e}'_i, \vec{v}_j \rangle, \vec{e}'_j \equiv \frac{\vec{v}_{j,\perp}}{\|\vec{v}_{j,\perp}\|}$

Kovariante Notation für nicht-orthonormale Basis

Index oben: kontravariant
Index unten: kovariant

ZL3c

Metrik einer Basis $\{\hat{v}_j\}$ von V : $\langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle = g_{ij}$. Inverse Metrik erfüllt $g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$

Kontravar. Basis: $\hat{v}^i \equiv g^{ij} \hat{v}_j$ ist orthonormal zur kovar. Basis: $\langle \hat{v}^i, \hat{v}_j \rangle = \delta^i_j$

Zerlegung nach Komponenten: $\hat{x} = \hat{v}_i x^i = \hat{v}_i \langle \hat{v}^i, \hat{x} \rangle_V$ kovariante Basis
 $= x_j \hat{v}^j = \langle \hat{x}, \hat{v}_j \rangle_V \hat{v}^j$ kontravariante Komponenten
kontravariante Basis
kovariante Komponenten

$$\begin{aligned} \hat{v}_j &= g_{ji} \hat{v}^i = \hat{v}^i g_{ij}, & x_i &= g_{ij} x^j = x^j g_{ji}, & g_{ij} &\text{zieht Index runter} \\ \hat{v}^i &= g^{ij} \hat{v}_j = \hat{v}_j g^{ji}, & x^j &= g^{ji} x_i = x_i g^{ij}, & g^{ij} &\text{zieht Index hoch} \end{aligned}$$

Inneres Produkt in V : \iff Verallgemeinertes Skalarprodukt in \mathbb{R}^n

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_V = x^i g_{ij} y^j = x^i y_i = x_j y^j \equiv \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

Für Orthonormalbasis, mit $g_{ij} = \delta_{ij}$, ist Unterscheidung zwischen Index oben/unten nicht nötig:

$$x_i = \delta_{ij} x^j = x^i, \quad g^{ij} = \delta^{ij}, \quad \hat{v}^i = \delta^{ij} \hat{v}_j = \hat{v}_i.$$

Deswegen: wenn möglich eine Orthonormalbasis wählen!