L2. Vektorräume

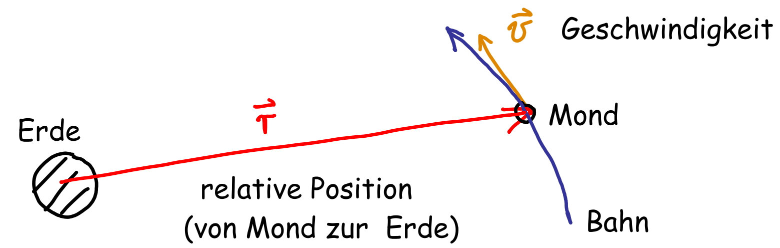
Schulwissen: Physikalische Größen lassen sich einteilen in:

1) <u>Skalare:</u> bestimmt durch Angabe einer Zahl (+ Einheit)

Beispiele: Masse, Volumen, Energie, Arbeit, Druck, Temperatur

2) <u>Vektoren:</u> bestimmt durch Angabe einer Zahl (+ Einheit) und einer Richtung

Beispiele: Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Impuls, Drehmoment, Feldstärken, Verschiebung



Übliche Notationen: $\vec{r}$, $\vec{r}$, $\underline{r}$, $\mathbf{r}$

JvD

(Text: fett gedruckt)

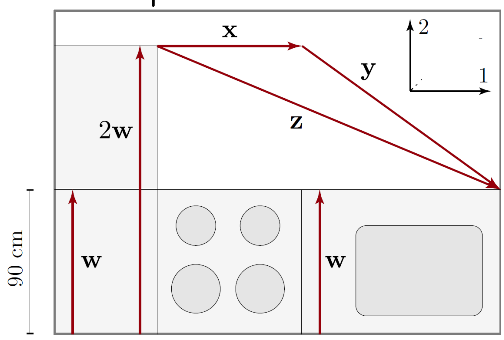
L2.1 Vektorraum-Motivation

Wie lässt sich Küchenplan quantitativ beschreiben, ohne eine Skizze zu machen?

Festlegungen eines 'Koordinatensystems':

- Wahl v. zwei Richtungen: $\xrightarrow{1}$, $\uparrow_2$
- Wahl einer Längeneinheit entlang jeder Richtung (zB. 1cm)

Küchenplan:



Relative Position zwischen zwei Punkten: wird eindeutig spezifiert durch einen Pfeil, oder Angabe v. zwei Zahlen ('Komponenten'):

$$\begin{pmatrix} \text{relativer Abstand entlang Achse 1} \\ \text{relativer Abstand entlang Achse 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \vec{x}$$

'Vektor'

[Altland-Delft (AD)-Konvention: Index oben; viele anderen Texte: Index unten]

[Siehe AD-Buch, S. 24]

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 90 \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 120 \\ -90 \end{pmatrix} \tag{1}$$

- parallele Pfeile gleicher Länge stellen <u>denselben</u> Vektor dar, denn die <u>relative</u> Position zwischen End- und Anfangspunkt ist dieselbe
- geometrische Definition von:
- Vektoraddition (komponentenweise): $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 120 \\ -90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ -90 \end{pmatrix}$ (2)
- Multiplikation mit Skalar (komponentenweise): $2\vec{y} = 2\begin{pmatrix} 120 \\ -90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ -180 \end{pmatrix}$ (3)

L2.1 Standard-Vektorraum $\mathbb{R}^n$

L2.1c

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \;\middle|\; x^1, x^2, \dots, x^n \in \mathbb{R} \right\} \qquad (1)$$

n-Komponenten-Vektor (Spaltennotation)

i-Komponente: $(\vec{x})^i = x^i$

$$\equiv (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$$

'transponiert'

n-Komponenten-Vektor (Reihennotation)

Vektoraddition: 'komponentweise Addition'

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\overrightarrow{x+y}) \equiv \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \\ \vdots \\ x^n + y^n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Beispiel in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Skalare Multiplikation: 'komponentweise Streckung'

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (\lambda, \vec{x}) \mapsto (\lambda \vec{x}) \equiv \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \lambda x^2 \\ \vdots \\ \lambda x^n \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Skalar

Beispiel in $\mathbb{R}^3$:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

L2.2 Allgemeine Definition eines Vektorraums

L2.2a

Obige Vektoren in $\mathbb{R}^n$ haben eine Reihe v. wichtigen Eigenschaften [(siehe (i)-(ix) unten].
Diese werden als Axiome (= 'definierende Eigenschaften') des Begriffs 'Vektorraum' aufgefasst.

Definition: Ein F-Vektorraum über einem Körper F (z.B. $\mathbb{R}$) ist ein Trippel, $(V, +, \cdot)$,
bestehend aus einer Menge V, ausgestattet mit zwei Verknüfungsregeln,

Vektoraddition: $+ : V \times V \to V, \quad (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \overrightarrow{u+v} \equiv \vec{u} + \vec{v}$ (1)

Skalare Multiplikation: $\cdot : F \times V \to V, \quad (a, \vec{v}) \mapsto a \cdot \vec{v} \equiv (a\vec{v})$ (2)

mit folgenden Eigenschaften:

(I) $(V, +)$ ist eine kommutative (Abelsche) Gruppe. Das heisst, $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ gilt:

i) Abgeschlossenheit: $\vec{u} + \vec{v} \in V$ (3)

ii) Assoziativität: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (4)

iii) Neutrales Element: $\vec{0}$ (Nullvektor) (5)

iv) Inverses Element von $\vec{v}$: $-\vec{v}$ (6)

v) Kommutativiät: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (7)

(II) Eigenschaften der skalaren Multiplikation: $\forall a, b \in F, \; \vec{u}, \vec{v} \in V$: **L2.2b**

vi) Distributivität bzgl. Skalar-Addition: $(a+b)\cdot\vec{v} = (a\,\vec{v}) + (b\,\vec{v})$ (1)

vii) Distributivität bzgl. Vektor-Addition: $a\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = (a\,\vec{u}) + (a\,\vec{v})$ (2)

viii) Assoziativität bzgl. Skalarmultiplikation: $(ab)\cdot\vec{v} = a\,(b\,\vec{v})$ (3)

ix) Neutrales Element: für $1 \in F$ gilt: $1\cdot\vec{v} = \vec{v} \;\; \forall\, \vec{v} \in V$ (4)

$\cancel{\frac{1}{\vec{v}}}$ gibt's nicht!

Anmerkungen:
- Die allgemeine Def. eines Vektorraums bezieht sich in keiner Weise auf 'Koordinaten'
auch nicht auf die 'Dimension' des Vektorraums

- Für $a, b, c \in F$, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$, gilt: (5)

$a\,\vec{u} + b\,\vec{v} \in V$ $\quad$ $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w} \in V$ (6)

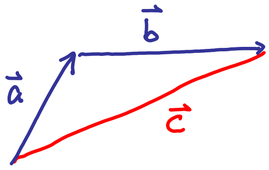
'Linearkombination v. Vektoren'

L2.3 Vektorräume: Beispiele

L2.3a

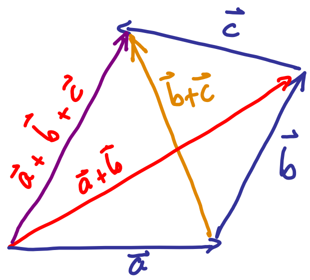
Beispiel 1: Pfeile in 2 oder 3 Dimensionen (geometrischer Ausgangspunkt für Vektorraum-Axiome)

(I) Addition von Pfeilen '+' ist 'geometrisch' festgelegt:
(Anfang des zweiten Pfeils ans Ende des ersten Pfeils)



(i) Abgeschlossenheit: offensichtlich

(ii) Assoziativität: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

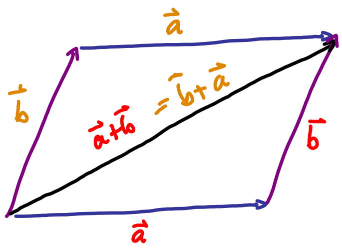


(iii) Neutrales Element: 'Nullvektor': $\vec{0} = 0$

(einziger Vektor ohne definierte Richtung)

(iv) Additives Inverse: $-\vec{a}$ ist antiparallel zu $\vec{a}$:

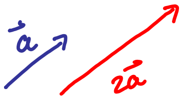
$\nearrow \vec{a} \qquad \swarrow -\vec{a}$



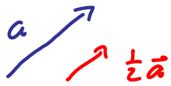
(v) Kommutativität: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(II) Skalare Multiplikation '.' ist 'geometrisch' festgelegt: (mit $\lambda \in \mathbb{R}$)

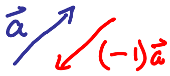
$\lambda > 1$: Streckung



$1 > \lambda > 0$: Stauchung

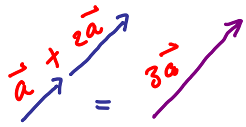


$\lambda < 0$: Richtungsänderung

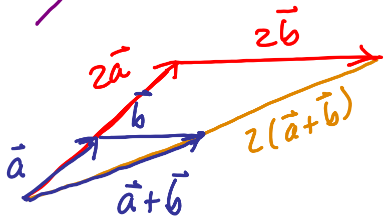


Also: $\lambda \vec a$: Betrag $\equiv |\lambda||\vec a|$ Richtung $\begin{cases} \text{parallel zu } \vec a & \text{falls } \lambda > 0 \\ \text{antiparallel zu } \vec a & \text{falls } \lambda < 0 \end{cases}$

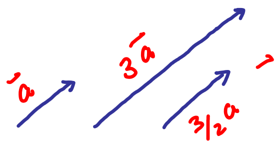
Distributivität bzgl. Skalaraddition: $(\mu + \lambda)\vec a = \mu \vec a + \lambda \vec a$



Distributivität bzgl. Vektoraddition: $\underline{\lambda(\vec a + \vec b)} = \underline{\lambda \vec a + \lambda \vec b}$



Assoziativität: $\lambda(\mu \vec a) = (\lambda\mu)\vec a = \lambda(\mu \vec a)$



$\frac{1}{2}(3\vec a) = \frac{3}{2}\vec a$

Neutrales Element: $1(\vec a) = \vec a$

Beispiel 2: Standard-Vektorräume:

rationale Zahlen: $F = \mathbb{Q}$: $(q^1, \dots, q^n)^T \in \mathbb{Q}^n$

reelle Zahlen: $F = \mathbb{R}$: $(r^1, r^2, \dots, r^n)^T \in \mathbb{R}^n$

komplexe Zahlen: $F = \mathbb{C}$: $(z^1, z^2, \dots, z^n)^T \in \mathbb{C}^n$ $[z^j = x^j + i y^j]$

Beispiel 3: d-dimensionaler Euklidischer Raum: $\mathbb{E}^d$ (z.B. Raum von Ortsvektoren)

In einem Euklidischen Raum gibt es keinen 'ausgezeichneten', 'besonderen' Punkt.
Aber in $\mathbb{R}^d$ gibt es einen ausgezeichneten Vektor, den 'Nullvektor' = 'Ursprung'.

$(\mathbb{E}^d, 0) \overset{\text{assoziere}}{\Longleftrightarrow} \mathbb{R}^n$

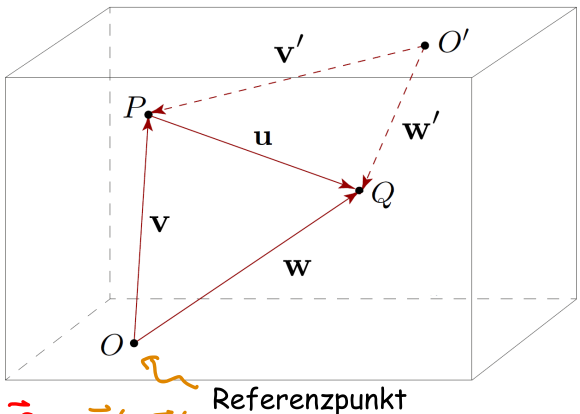
Wähle

Referenzpunkt O $\Longleftrightarrow$ Ausgezeichneter Vektor $\vec 0$

Punkt P $\Longleftrightarrow$ Vektor von O zu P: $\vec v$

Punkt Q $\Longleftrightarrow$ Vektor von O zu Q: $\vec w$

Relative Position $\Longleftrightarrow$ Vektor von P zu Q: $\vec u = \vec w - \vec v = \vec w' - \vec v'$



Relative Postionen = Differenzvektoren sind unabhängig von Wahl des Referenzpunkts

Beispiel 4. Raum v. Funktionen

L2.3d

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f(t), \qquad g: I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto g(t)$$

$[0,\tau] \in \mathbb{R}$

Raum aller solcher Funktionen heißt: $\mathcal{L}^2(I)$

Mathe-Notation für 'quadrat-integrable Funktionen', mit $\int_0^\tau dt\, f^2(t) < \infty$
Aber für die aktuelle Vorlesung spielt Quadrat-Integrabilität keine Rolle.

Definiere:

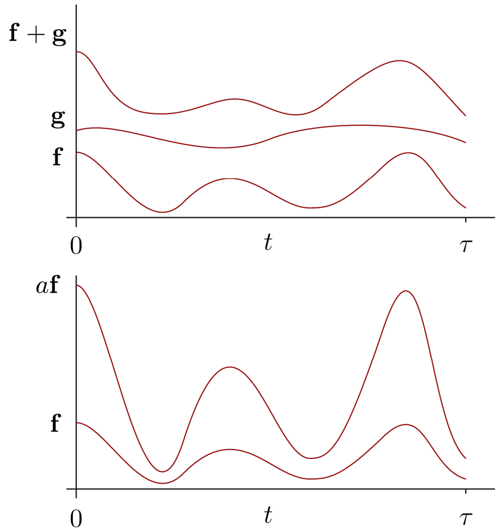
Addition:

$$f+g: I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto (f+g)(t) \equiv f(t) + g(t) \qquad (1)$$

Skalare Multiplikation: $(a \in \mathbb{R})$

$$a \cdot f: I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto (a \cdot f)(t) \equiv a\, f(t) \qquad (2)$$

$(\mathcal{L}^2(I), +, \cdot)$ ist ein Vektorraum!



Beispiel 5: Diskretisierte Funktionen

L2.3e

$$f: [0,\tau] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f(t)$$

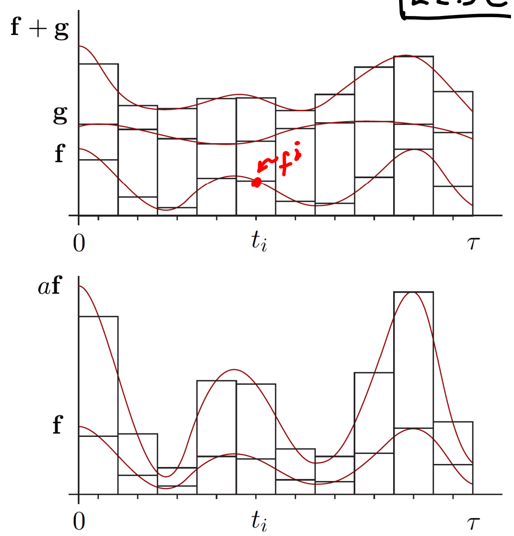
Diskretisiere die Zeit: $t_i \in$ Interval $i = 1, \dots, N$

$$f^i = f(t_i)$$

Diskretisierte Funktion: $\vec{f} = (f^1, \dots, f^N)^T$

Vektoraddition: $(\vec{f} + \vec{g})^i = (\vec{f})^i + (\vec{g})^i$

Skalarmultiplikation: $(a \cdot \vec{f})^i = a (\vec{f})^i$



Vektorraum: $\left(\{\vec{f} \mid (\vec{f})^i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N\}, +, \cdot\right) \cong \mathbb{R}^N$

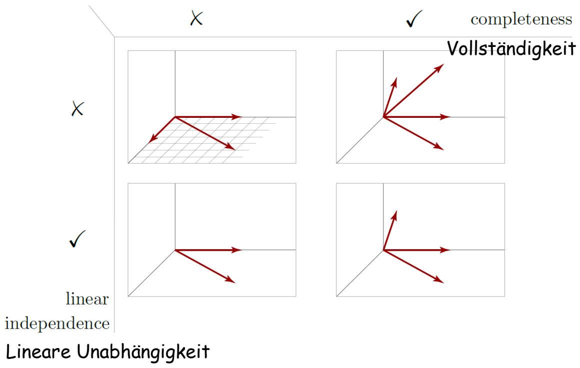
Weitere Beispiele von Vektorräumen (Zukunftsmusik):
- (Ort,Impuls) im klassischen Phasenraum (T1: Klassische Mechanik)
- Zustandsvektoren in der Quantenmechanik (T2: Quantenmechanik)
- Matrizen (P1: Experimentalphysik, T2: Quantenmechanik)
- Elektrische und Magnetische Felder (T3: Elektrodynamik)
- Quantenfelder (T6: Quantenfeldtheorie)

L2.4 Basis und Dimension

Ausgangsfrage: gegeben $\mathbb{F}$- Vektorraum V,

wieviele Komponenten hat $\vec{v} \in V$?

Wieviele 'unabhängige' Vektoren sind nötig und ausreichend, um alle anderen Vektoren durch sie ausdrücken zu können?
Formaler: was ist die 'Dimension' von V ?



Sei S eine Menge von m Vektoren:

$$S \equiv \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}, \quad \vec{v}_i \in V \quad (\vec{v}_i \neq \vec{0}) \tag{1}$$

Wir schreiben Indizes unten, wenn sie Vektoren (nicht Komponenten) unterscheiden !

Definition: 'Span'
'lineare Hülle'

$$\mathrm{span}(S) \equiv \{\vec{v}_1 a^1 + \vec{v}_2 a^2 + \dots + \vec{v}_m a^m \mid a^1, \dots, a^m \in \mathbb{F}\} \tag{2}$$

= alle möglichen 'Linearkombination' der Vektoren $\{\vec{v}_i\}$

- span(S) ist selbst ein Vektorraum, im Allg. ein 'Unterraum' von V: $\mathrm{span}(S) \subseteq V$ (3)

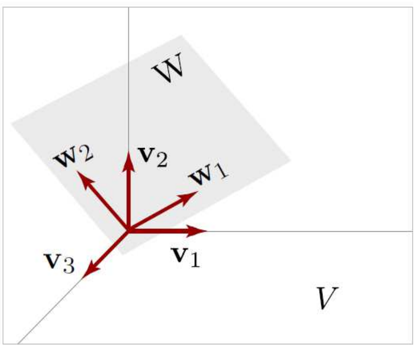
  'ist eine Teilmenge von, oder ist gleich'

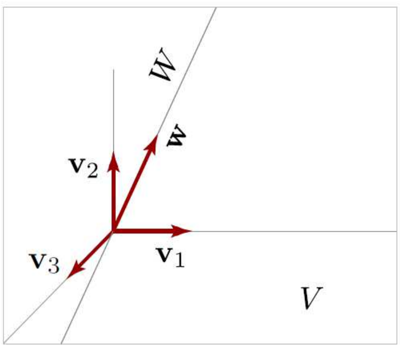
- Oft is span(S) ein 'echter Unterraum' von V: $\mathrm{span}(S) \subsetneq V$

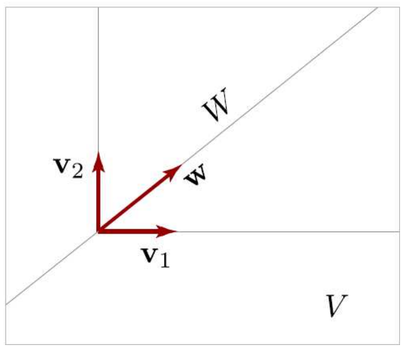
  'ist eine Teilmenge von, und nicht gleich'

Beispiele v. Unterräumen:

$\dim V = 3$ | $\dim V = 3$ | $\dim V = 2$







$W = \mathrm{span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$, $\dim W = 2$ | $W = \mathrm{span}\{\vec{w}\}$, $\dim W = 1$ | $W = \mathrm{span}\{\vec{w}\}$, $\dim W = 1$

Allgemeine Frage: unter welchen Umständen ist $\mathrm{span}(S) = V$?

L2.4c

Definition: lineare Unabhängigkeit

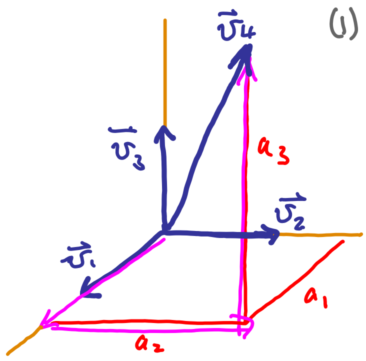
(dient der Verallgemeinerung des Begriffs einer 'Basis')

Die Menge der Vektoren $S \equiv \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$, (1)

heißt 'linear unabhängig', falls es nicht möglich ist, eine nicht-triviale Linearkombination zu finden, die Null liefert. M.a.W:

falls aus $\vec{v}_1 a^1 + \vec{v}_2 a^2 + \ldots + \vec{v}_m a^m = \vec{0}$ (2)

folgt dass $a^1 = a^2 = \ldots = a^m = 0$ (3)



geometrische Anschauung

Umgekehrt: S ist 'linear abhängig', falls sich einer der Vektoren als Linearkombination der anderen schreiben lässt:

Z.B. $\vec{v}_m = -\frac{1}{a^m}\left(\vec{v}_1 a^1 + \ldots + \vec{v}_{m-1} a^{m-1}\right)$ (4)

In Skizze: $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ sind linear <u>un</u>abhängig, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ linear <u>ab</u>hängig

---

Beispiel in $\mathbb{R}^2$: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

- $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ sind linear abhängig, denn $1\cdot\vec{v}_1 + 1\cdot\vec{v}_2 + 2\cdot\vec{v}_3 = \vec{0}$
- $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ sind linear <u>un</u>abhängig, denn $a^1\vec{v}_1 + a^2\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow a^2 = 0,\ a^1 = 0$

L2.4d

Falls S linear abhängig ist, enthält S 'redundante' Vektoren.
Span ändert sich nicht, wenn linear abhängige Vektoren weggelassen werden:

Falls $\vec{v}_m = \sum_{j=1}^{m-1} \vec{v}_j a^j$ (Intuitiv: der Vektor $\vec{v}_m$ bringt keine Richtung ein, die nicht schon in $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{m-1}$ enthalten ist)

gilt: $\mathrm{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{m-1}, \vec{v}_m\} = \mathrm{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{m-1}\}$ (1)

(z.B. $\vec{v}_4$ auf Seite L2.4c)

Empfehlung: Redundanzen vermeiden, immer mit linear unabhängigen Vektoren arbeiten!

Definition: Vollständigkeit

S heisst 'vollständig', falls $\mathrm{span}(S) = V$ (2)

d.h. jeder Vektor in V lässt sich als Linearkombination v. Vektoren in S schreiben.

Definition: Basis

L2.4e

Falls $S \equiv \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ (i) vollständig und (ii) linear unabhängig ist, (1)

bildet S eine 'Basis' für V. Die Anzahl Elemente der Basis heisst 'Dimension' v. V

z.B: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Konsequenzen:

(i): jeder Vektor $\vec{v} \in V$ läßt sich schreiben als Linearkombination von Basisvektoren:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 a^1 + \vec{v}_2 a^2 + \ldots + \vec{v}_n a^n \qquad \text{'Entwicklung nach Basisvektoren'} \qquad (2)$$

(ii): diese Linearkombination ist eindeutig ('unique');

denn wäre sie nicht eindeutig, d.h., gäbe es auch eine andere Linearkombination für $\vec{v}$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 b^1 + \vec{v}_2 b^2 + \ldots + \vec{v}_n b^n \, , \qquad (3)$$

würde gelten:

(2) − (3): $$\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = \vec{v}_1(a^1 - b^1) + \vec{v}_2(a^2 - b^2) + \ldots \vec{v}_n(a^n - b^n) \qquad (4)$$

im Widerspruch zur Eigenschaft der linearen Unabhängigkeit v. S !

Einsteinsche Summenkonvention (ES)

L2.4f

$$A_1 B^1 + A_2 B^2 + \ldots + A_n B^n = \sum_{i=1}^{n} A_i B^i = \sum_i A_i B^i \overset{ES}{=} A_j B^j = A_i B^i \qquad (1)$$

Summenzeichen verkürzt Formeln!

Summationsgrenzen sind ohnehin immer dieselben, lasse sie weg!

ES: wenn ein 'Paar von Wiederholten Indizes' auf derselben Seite der Gleichung vorkommt, ist implizit auch eine Summe über diesen Index gemeint!

Da über den wiederholten Index summiert wird, ist sein 'Name' (i, j oder l ...) egal!

In Altland-Delft-Konvention enthält eine ES-Summe immer einen Index oben, einen unten.

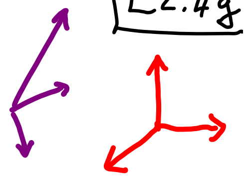
$$A^j{}_1 B^1 + A^j{}_2 B^2 + \ldots + A^j{}_n B^n = \sum_{i=1}^{n} A^j{}_i B^i = \sum_i A^j{}_i B^i \overset{ES}{=} A^j{}_i B^i$$

Über i wird summiert (wiederholtes Indexpaar auf derselben Seite der Gleichung)

Über j wird nicht summiert: j kommt auf jeder Seite der Gleichung nur einmal vor!

L2.4g

Man kann zeigen:
- für jeden Vektorraum existiert eine Basis
- alle Basen eines gegebenen Vektorraums bestehen aus gleich vielen Vektoren
- alle Basen lassen sich durch einander ausdrücken ('Basistransformation')



<u>Standardbasis ('kanonische Basis') in $\mathbb{R}^n$</u>

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \;\middle|\; x^1, \ldots, x^n \in \mathbb{R} \right\} \qquad (1)$$

Standardbasis: $\{ \vec{e}_j \mid j = 1, \ldots, n \}$ mit Basisvektoren $\vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Position j (2)

Kompakte Notation für i-Komponente v. $\vec{e}_j$: $\quad (\vec{e}_j)^i = \delta^i{}_j \qquad (3)$

'Kronecker-delta' Symbol: $\delta^i{}_j \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \delta^1{}_1 & \delta^1{}_2 & \delta^1{}_3 \\ \delta^2{}_1 & \delta^2{}_2 & \delta^2{}_3 \\ \delta^3{}_1 & \delta^3{}_2 & \delta^3{}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$

Entwicklung eines allgemeinen Vektors nach Standardbasis: $\quad \vec{x} = \vec{e}_1 x^1 + \vec{e}_2 x^2 + \ldots + \vec{e}_n x^n \overset{\text{ES}}{=} \vec{e}_j x^j \qquad (5)$

<u>L2.5 Bezug zwischen n-dimensionalem $\mathbb{R}$ Vektorraum V und $\mathbb{R}^n$</u>

L2.5a

Hut: 'Vektor aus allgemeinem Vektorraum V (z.B. abstrakt, oder geometrisch definiert)

$\{ \hat{v}_j \} \equiv \{ \hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_n \}$ sei eine Basis für V (1)

Entwicklung eines allgemeinen Vektors in dieser Basis: $\quad \underset{\text{Basisvektor}}{\hat{u} = \hat{v}_1}\, \underset{\text{Koeffizient}}{u^1} + \ldots + \hat{v}_n u^n \overset{\text{ES}}{=} \hat{v}_j u^j \qquad (2)$

Die Basis definiert eine bijektive Abbildung, die jeden Vektor $\hat{v} \in V$ auf den aus seinen Komponenten gebildeten Spaltenvektor in $\mathbb{R}^n$ abbildet:

$$\phi_{\hat{v}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\hat{u} = \hat{v}_j u^j \longmapsto \phi_{\hat{v}}(\hat{u}) \equiv \vec{u} \equiv \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

deutet an, dass die Abbildung sich auf die $\hat{v}$ -Basis

auf gut Deutsch: schreibe statt dem abstrakten Vektor $\hat{u}$ einen Spaltenvektor $\vec{u}$ hin, gebildet aus seinen Komponenten bezüglich $\hat{v}_j$

Man sagt: $\vec{u}$ ist die 'Darstellung' von $\hat{u}$ in der Basis $\{\hat{v}_j\}$.

<u>Basis</u>vektoren in V werden auf <u>Einheits</u>vektoren in $\mathbb{R}^n$ abgebildet: $\quad \phi_{\hat{v}}(\hat{v}_j) \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(4g.2)}{=} \vec{e}_j \qquad (4)$

Position j

Die Abbildung $\phi_{\hat{v}}$, die einen abstrakten Vektor durch seinen Komponentenvektor ausdrückt, 'respektiert' die Regeln der Vektoraddition und Skalarmultiplikation:

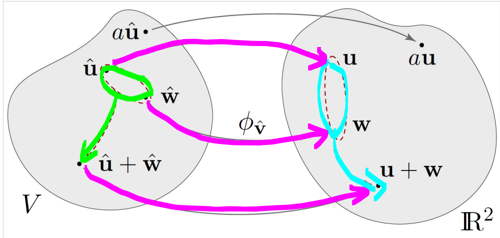
L2.5b

$$\phi_{\hat{v}}(\hat{u}+\hat{w}) = \phi_{\hat{v}}(\hat{u}) + \phi_{\hat{v}}(\hat{w}) \qquad (1)$$

addieren, dann abbilden = abbilden, dann addieren!

$$\phi_{\hat{v}}(a\hat{u}) = a\,\phi_{\hat{v}}(\vec{u}) \qquad (2)$$

multiplizieren, dann abbilden = abbilden, dann multiplizieren!



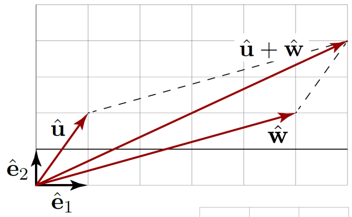
(1), (2) $\Rightarrow$ $\phi_{\hat{v}}$ ist ein 'Isomorphismus' zwischen V und $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ V und $\mathbb{R}^n$ sind 'isomorph': $V \cong \mathbb{R}^n$ (sehr starke Identifizierung!) [aber nicht eindeutig, da Basis-abhängig]

Beispiel für n=2: $\phi_{\hat{e}} : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ geometrische Vektoren

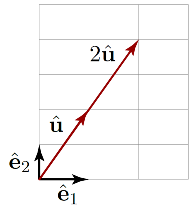
$$\phi_{\hat{e}}(\hat{u}+\hat{w}) \overset{(5a.3)}{=} \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} \overset{(2a.2)}{=} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \vec{u}+\vec{w} = \phi_{\hat{e}}(\hat{u}) + \phi_{\hat{e}}(\hat{w}) \qquad (3)$$

Addition in $\mathbb{E}^2$ Addition in $\mathbb{R}^2$



$$\phi_{\hat{e}}(2\hat{u}) \overset{(5a.3)}{=} \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2\vec{u} = 2\,\phi_{\hat{e}}(\hat{u}) \qquad (4)$$

Multiplikation in $\mathbb{E}^2$ Multiplikation in $\mathbb{R}^2$



Zusammenfassung: L2 Vektorräume

ZL2a

$\mathbb{F}$-Vektorraum: $(V, +, \cdot)$

Vektoraddition: $+ : (V, V) \longrightarrow V$

$(\vec{a}, \vec{b}) \longmapsto \vec{a}+\vec{b}$

Axiome:
(i)-(v): kommutative Gruppe

Skalare Multiplikation: $\cdot : (\mathbb{F}, V) \longrightarrow V$

$(\lambda, \vec{a}) \longmapsto \lambda\cdot\vec{a} \equiv (\lambda\vec{a})$

(vi,vii) distributiv
(viii) assoziativ
(ix) Identitätselement 1

Wichtigstes Beispiel: $\mathbb{R}^n$

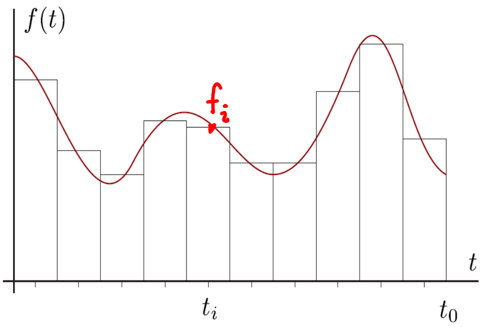
$$\mathbb{R}^n = \{\vec{a} = (a^1, \dots, a^n)^T \mid a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R}\}$$

Vektoraddition: $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto (\vec{a}+\vec{b}) \equiv \begin{pmatrix} a^1+b^1 \\ \vdots \\ a^n+b^n \end{pmatrix}$

Skalare Multiplikation: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(\lambda, \vec{b}) \mapsto (\lambda\vec{b}) \equiv \begin{pmatrix} \lambda b^1 \\ \vdots \\ \lambda b^n \end{pmatrix}$

Weiteres Beispiel: Diskretisierte Funktionen:

Diskretisierte Funktion: $\vec{f} = (f^1, \dots, f^N)^T$



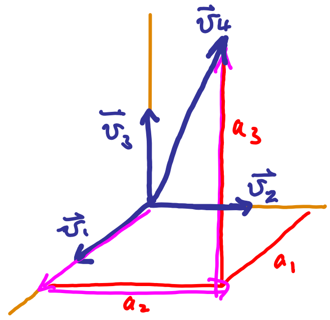
Vektoraddition: $(\vec{f}+\vec{g})^i = (\vec{f})^i + (\vec{g})^i$

Skalarmultiplikation: $(a\cdot\vec{f})^i = a(\vec{f})^i$

Vektorraum: $\left(\{\vec{f} \mid (\vec{f})^i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N\}, +, \cdot\right) = \mathbb{R}^N$

Basis und Dimension

$$S \equiv \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\} \overset{?}{=} V$$



$\text{Span}(S)$ $\equiv$ alle möglichen Linearkombination der Vektoren $\{\vec{v}_j\}$

'Linear unabhängig', falls $\vec{v}_j a^j = \vec{0} \implies a^j = 0 \ \forall j$

S ist 'vollständig', falls $\text{span}(S) = V$

S bildet 'Basis', falls S vollständig und linear unabhängig ist.

Standardbasis in $\mathbb{R}^n$ $\quad \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, j-Position

i-Komponente v. j-tem Basisvektor: $(\vec{e}_j)^i = \delta^i{}_j$

'Kronecker-delta' Symbol: $\delta^i{}_j \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$