Erläuterung der Seiten- und Gleichungsnummerierung:
L: Teil "Lineare Algebra" in AD.
L1: Kapitel L1, "Mathematics before Numbers", in AD
a: erste Seite im handschriftlichen Skript zu Kapitel L1

Gleichungen die auf Seite L1a (Kapitel L1, Seite a) stehen, werden zitiert als
(1), (2) falls die Zitate auf derselben Seite stehen;
(a.1), (a.2) falls die Zitate auf anderen Seiten (z.B. b,c) desselben Kapitels L1 stehen;
(L1a.1), (L1a.2) falls die Zitate auf Seiten anderer Kapitel (z.B. L2, C3) stehen.

L1 Mathematische Grundbegriffe

L1.1 Mengen und Abbildungen

Zwei Mengen: $A = \{ \times \; + \; \Delta \}$ $\quad B = \{ \circ \; \square \}$

kartesisches Produkt: $A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A, \; b \in B \} = \{ (\times,\circ) \; (\times,\square) \; (+,\circ) \; (+,\square) \; (\Delta,\circ) \; (\Delta,\square) \}$ (1)

'ist Element von'

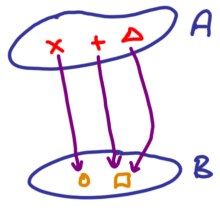
Abbildung:

Definitionsmenge Zielmenge

Name der Abbildung $F : A \longrightarrow B$

$a \longmapsto F(a)$

Argument Zielelement



(2)

$F(A) = B$

Beispiel: $F : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \{1, -1\}$

$n \longmapsto F(n) = (-1)^n$

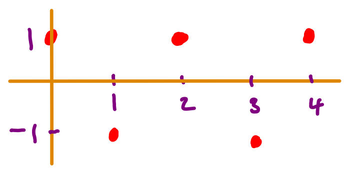
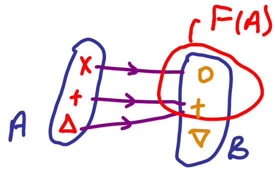


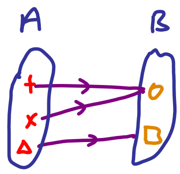
Bild v. A: $F(A) = \{ F(a) \mid a \in A \} \subseteq B$

'ist eine Untermenge von'

(kann auch dieselbe Menge sein)



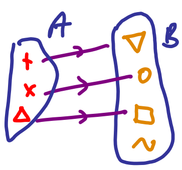
Eine Abbildung ist...



surjektiv falls $\forall \; b \in B$ gilt: $b = F(a)$ für mindestens ein $a \in A$

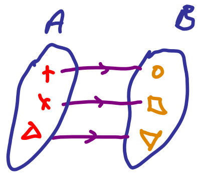
'für alle'

'alle Elemente v. B werden erreicht'



injektiv falls $\forall \; b \in B$ gilt: $b = F(a)$ für höchstens ein $a \in A$

'kein Element v. B wird mehr als einmal erreicht'



bijektiv falls $\forall \; b \in B$ gilt: $b = F(a)$ für genau ein $a \in A$

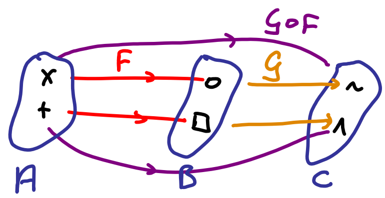
(injektiv und surjektiv)

'1-zu-1-Abbildung'

<u>Verkettung / Komposition</u>

LIc

$F: A \to B$, $\quad a \mapsto F(a)$, $\qquad g: B \to C$, $\quad b \mapsto g(b)$ $\qquad g \circ F : A \to C$, $\quad a \mapsto g(F(a))$

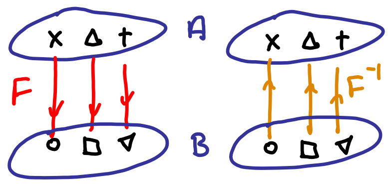


Beispiel: $\quad A, B, C = \mathbb{Z}$

$F(a) = a+1 \qquad g(b) = 2b \quad , \quad (g \circ F)(a) = 2(a+1)$

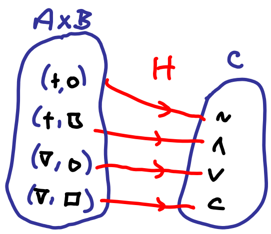
<u>Inverse</u> einer bijektiven Abbildung:

$F: A \to B$, $\quad a \mapsto F(a)$ $\qquad F^{-1}: B \to A$, $\quad F(a) \mapsto F^{-1}(F(a)) = a$



<u>Binäre Verknüpfung:</u>
Definitionsmenge ist ein kartesisches Produkt:

$H: A \times B \to C$, $\quad (a, b) \mapsto c = F(a,b)$

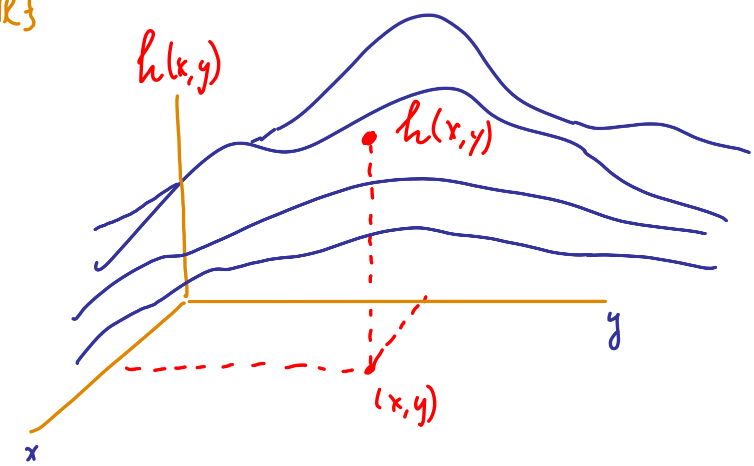


<u>Beispiel einer binären Verknüpfung: Höhe eines Gebirges</u>

LId

$$h : \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}_{\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}} \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto h(x,y)$$



L1.2 Gruppe: (einfachste Struktur die 'Operationen' mit Elementen erlaubt)

L1e

Definition: Eine 'Gruppe' $\mathcal{G} = (A, \bullet)$
ist eine Menge A ausgestattet mit
einer binären Verknüpfung,

kartesisches Produkt

$$\bullet : A \times A \longrightarrow A \qquad (1)$$

$$(a, b) \longmapsto a \bullet b \qquad (2)$$

und folgenden Eigenschaften ('Gruppenaxiome'):

'für alle'

i) Abgeschlossenheit: $\forall a, b \in A, \quad a \bullet b \in A$ (3)

ii) Assoziativität: $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ (4)

'es existiert'

iii) neutrales Element: $\exists e \in A$, so dass $a \bullet e = e \bullet a = a, \quad \forall a \in A$ (5)

iv) inverses Element: $\forall a \in A \ \exists b \in A$ mit $a \bullet b = e = b \bullet a$ (6)

$a^{-1} \equiv b$

'links wird definiert durch rechts' (7)

Falls $a \bullet b = b \bullet a$ 'kommutative Gruppe', 'Abelsche Gruppe'

Falls $a \bullet b \neq b \bullet a$ 'nicht-kommutative Gruppe', 'nicht-Abelsche Gruppe' (8)

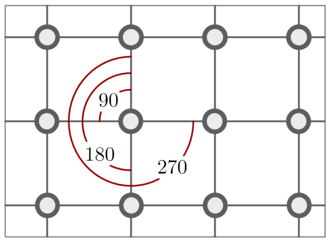
Beispiel 1: Rotationen eines Gitters um eine feste Achse um 0, 90, 180, 270 Grad

L1f

$r(\phi) \equiv$ Rotation um ϕ, $\quad r(\phi + 360) = r(\phi)$ (1)

$R_{90} \equiv \{ r(\phi) \mid \phi \in \{0, 90, 180, 270\} \}$ (2)

'linke Seite ist Kurznotation für rechte Seite,
bzw. wird durch rechte Seite definiert'



Verknüpfung v. zwei Rotationen aus C sei die Rotation um die Summe der Winkel:

$$\bullet : R_{90} \times R_{90} \longrightarrow R_{90}$$

z.B.: $(r(\phi), r(\phi')) \longmapsto r(\phi) \bullet r(\phi') \equiv r(\phi + \phi')$

$$r(0) \bullet r(90) = r(90)$$

$$r(90) \bullet r(180) = r(270)$$

$$r(270) \bullet r(180) = r(90)$$

Verknüpfungstabelle:

•	0	90	180	270
0	0	90	180	270
90	90	180	270	0
180	180	270	0	90
270	270	0	90	180

(bestimmt Gruppe vollständig)

$(R_{90}, \bullet)$ ist eine kommutative Gruppe.

Neutrales element: $r(0)$ $\qquad$ (Inverse von $r(\phi)$) $= r(360 - \phi)$

Beispiel 2: Addition ganzer Zahlen modulo q

Definition: für $p, q \in \mathbb{Z}$ sei $p \bmod q \equiv$ positiver Rest v. (p geteilt durch q)

Beispiele: $5 \bmod 4 = 1$ $\quad 9 \bmod 4 = 1$

$7 \bmod 4 = 3$ $\quad -3 \bmod 4 = (-4+1) \bmod 4 = 1$

Definition: $\mathbb{Z}_q \equiv \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$

Verknüpfung v. zwei Elementen v. $\mathbb{Z}_q$ sei ihre Summe modulo q:

$$\bullet: \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_q$$

$$(p, p') \mapsto p \bullet p' = (p+p') \bmod q$$

z.B. für q = 4:

$$0 \bullet 1 = (0+1) \bmod 4 = 1$$
$$1 \bullet 2 = (1+2) \bmod 4 = 3$$
$$3 \bullet 2 = (3+2) \bmod 4 = 1$$

Verknüpfungstabelle für q = 4:

$\bullet$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

(bestimmt Gruppe vollständig)

$(\mathbb{Z}_q, \bullet)$ ist eine kommutative Gruppe.

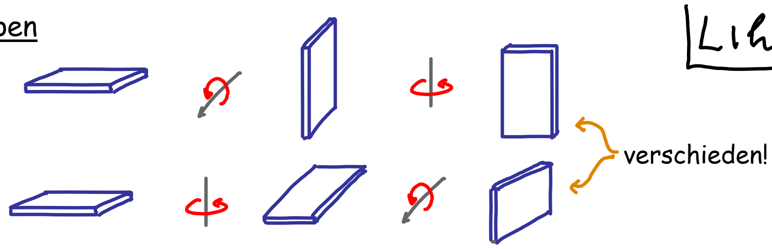
Ihre Verknüpungstabelle hat dieselbe Struktur wie die von $(R_{90}, \bullet)$

Folglich sind die beiden Gruppen 'isomorph': $(\mathbb{Z}_4, \bullet) \cong (R_{90}, \bullet)$ [AD-Buch, S. 9-10]

Beispiele von nicht-kommutativen Gruppen

Rotationen in drei Dimensionen:

Rotationen um verschiedene Achsen sind nicht-kommutativ (Reihenfolge ist nicht egal):



Permutationsgruppe

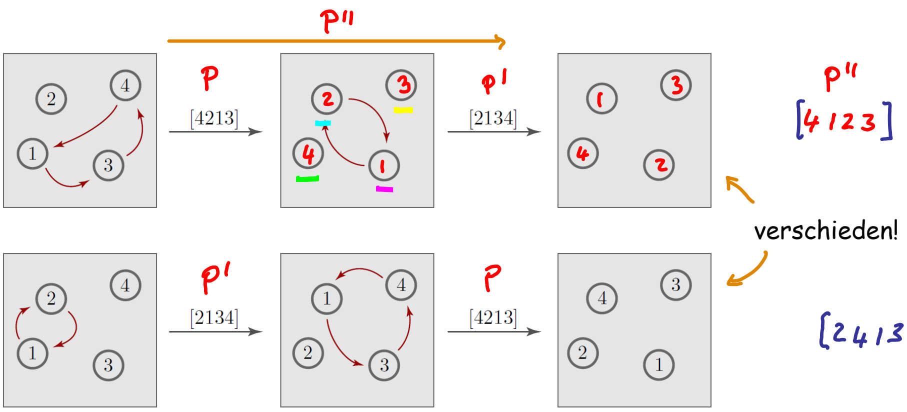
z.B. von 4 unterscheidbaren (nummerierten) Objekten

Kurznotation:

Beispiel einer Permutation: 'Ersetze 1 durch 4, 2 durch 2, 3 durch 1, 4 durch 3 ': [4 2 1 3]

(Die Ersetzungsregel bezieht sich nur auf die Nummern der Kugeln; sie gilt, egal wo die Kugeln liegen!)

Permutationen bilden eine Gruppe, mit Verknüpfungsregel: $P'' = P' \circ P$ = erst P, dann P'



$$\overset{P''}{[4123]} = \overset{P'}{[2134]} \circ \overset{P}{[4213]}$$

$$[2413] = \overset{P}{[4213]} \circ \overset{P'}{[2134]}$$

L1.3 Körper

Algebraische Struktur, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erlaubt.

Körper: $F = (A, +, \bullet)$ (zwei Verknüpfungsregeln: Addition & Multiplikation)

- Addition (kommutativ): neutrales Element = 0, (additives Inverse v. a) $= -a$

  Subtraktion: $a - b \equiv a + (-b)$

- Multiplikation (kommutativ): neutrales Element = 1,

  Division: $a/b \equiv a \cdot b^{-1}$ multiplik. Inverse v. $a = a^{-1}$

  Das neutrale Element d. Addition, 0, hat kein multiplikatives Inverse $(\cancel{\tfrac{1}{0}})$

- Distributivitätsaxiom: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

$\mathbb{Z}$ (ausgestattet mit der üblichen Definition von Addition und Multiplikation ganzer Zahlen) ist <u>kein</u> Körper, denn Multiplikation hat kein Inverses in $\mathbb{Z}$

Beispiele von Körpern:

<u>Rationale Zahlen:</u> $\mathbb{Q} \equiv \{ q/p \mid q, p \in \mathbb{Z},\ p \neq 0 \}$

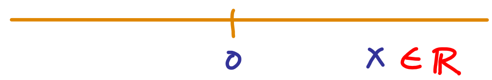
<u>Reelle Zahlen:</u> $\mathbb{R} = \{$ alle Zahlen, die als Limes von 'Folgen von rationalen Zahlen' dargestellt werden können $\}$

z.B.: $\mathbb{Q} \not\ni \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

kann approximiert werden durch die Folge

$$\left\{ \begin{array}{lll} 1{,}4 = \frac{14}{10} & \in \mathbb{Q} \\ 1{,}41 = \frac{141}{100} & \in \mathbb{Q} \\ 1{,}414 = \frac{1414}{1000} & \in \mathbb{Q} \\ 1{,}4142 = \frac{14142}{10000} & \in \mathbb{Q} \\ \vdots \end{array} \right.$$

$\mathbb{R} = \{$ alle Zahlen, die gebraucht werden, um eine Linie zu Parametrisieren $\}$



Komplexe Zahlen: $\mathbb{C}$

L1k

Ausgangsfrage: was sind die Lösungen der Gleichung $x^2 = -1$? $x \notin \mathbb{R}$ (1)

Lösungsansatz: erweitere unser Zahlensystem um eine neue Zahl, die 'imaginäre Einheit', i .

Definiere i als eine Zahl, deren Quadrat -1 liefert: $i^2 \equiv -1$ (2a)

Dasselbe gilt für $-i$: $(-i)^2 = -1$ (2b)

$\pm i$ sind Wurzeln von -1. Notationskonvention: $i \equiv \sqrt{-1}$ $(\notin \mathbb{R})$ (3)

Wurzel von negativen Zahlen: Sei $r > 0$: $\sqrt{-r} \equiv \sqrt{-1}\sqrt{r} = i\sqrt{r}$ (4)

Menge aller komplexen Zahlen: $\mathbb{C} \equiv \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ (5)

jede kompl. Zahl wird dargestellt durch zwei reelle Zahlen:

$x \equiv \mathrm{Re}(z) =$ 'Realteil v. z' (6)

$y \equiv \mathrm{Im}(z) =$ 'Imaginärteil v. z' (7)

L1l

Def. v. Addition: (analog den üblichen Regeln für einen Körper)

$z + z' = (x+iy) + (x'+iy') \overset{\downarrow}{=} (x + x') + i(y + y')$ (1)

Bsp: $(1+2i) + (2-3i) = 3 - i$

Def. v. Multiplikation: (analog den üblichen Regeln für einen Körper)

$z z' = (x+iy)(x'+iy') = (xx' + xiy' + iyx' + \underbrace{i^2}_{\overset{(k.2)}{=} -1} yy')$ (2)

$= (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$ (3)

Bsp: $(1+2i)(2-3i) = (2-(-6)) + i(-3+4) = 8 + i$

Neutrales Element der Addition: 0 Additives Inverse: $-z = -x - iy$ (4)

Neutrales Element der Multiplikation: 1

Falls $z \neq 0$, was ist das multiplikatives Inverse: $z^{-1} = ?$ (5)

Was sind Re(z^{-1}), Im(z^{-1}) ?

Definiere zunächst: 'komplex Konjugierte' von $z = x+iy$: $\quad z^* = \bar{z} \equiv x - iy$ (1)

dann:

$$z\bar{z} \overset{(1)}{=} (x+iy)(x-iy) \overset{(l.3)}{=} (x\cdot x - y\cdot(-y)) + i(\cancel{x(-y)} + \cancel{yx}) = \overbrace{x^2+y^2}^{\geq 0} \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

$$(2)\cdot\frac{1}{x^2+y^2}: \quad z\cdot\underbrace{\bar{z}\,\frac{1}{x^2+y^2}}_{\equiv z^{-1}} \overset{(2)}{=} 1 \qquad (3)$$

Inverse: $$z^{-1} \overset{(3)}{\equiv} \frac{\bar{z}}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}, \quad Re(z^{-1}) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad Im(z^{-1}) = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad (4)$$

Check: $$zz^{-1} \overset{(4)}{=} (x+iy)\frac{x-iy}{x^2+y^2} \overset{(2)}{=} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1 \ ✓ \qquad (5)$$

Merkregel für Inverse:
'mache den Nenner reell' !

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{x^2+y^2} \overset{✓}{=} (4) \qquad (6)$$

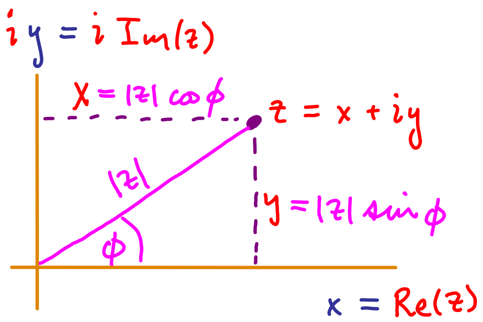
<u>Bsp:</u> $$z = 2-3i, \quad z^{-1} = \frac{1}{2-3i}\,\frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{1}{13}(2+3i) \qquad (7)$$

<u>Komplexe Ebene:</u>

Identifikation einer komplexen Zahl mit 'geordnetem Paar' von zwei reellen Zahlen:

$$I: \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \qquad (1)$$

$$z \mapsto (x,y) = \text{Punkt in zwei-dimensionaler Ebene ('komplexe Ebene')} \qquad (2)$$



<u>Polardarstellung:</u>

Betrag v. z (Abstand zum Ursprung):

$$|z| \equiv \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \qquad (3)$$

$$z = x + iy \qquad (4)$$

$$= |z|(\cos\phi + i\sin\phi) \qquad (5)$$

Reelle Achse: $z = x$ 'rein reell'

Imaginäre Achse: $z = iy$ 'rein imaginär'

Zusammenfassung: L1

ZL1

Gruppe: $\mathcal{G} = (A, \bullet)$ Verknüpfung: $\bullet : A \times A \longrightarrow A, \quad (a,b) \longmapsto a \bullet b$

(i) Abgeschlossenheit, (ii) Assoziativität, (iii) neutrales Element, (iv) inverses Element

---

Körper: $F = (A, +, \bullet)$ (zwei Verknüpfungsregeln: Addition & Multiplikation, beide liefern jeweils eine kommutative Gruppe)

Algebraische Struktur, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erlaubt.

Beispiele: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

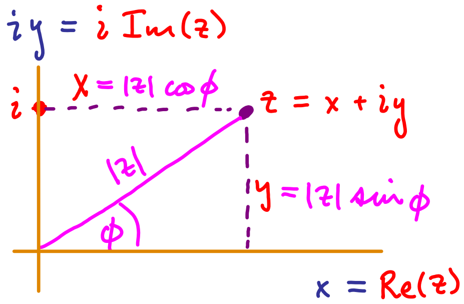
Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \} \longrightarrow \mathbb{R}^2 = \{ (x,y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

$i^2 = -1, \quad i = \sqrt{-1}$

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

$$z \cdot z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

$$z^* \equiv \bar{z} \equiv x - iy, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$



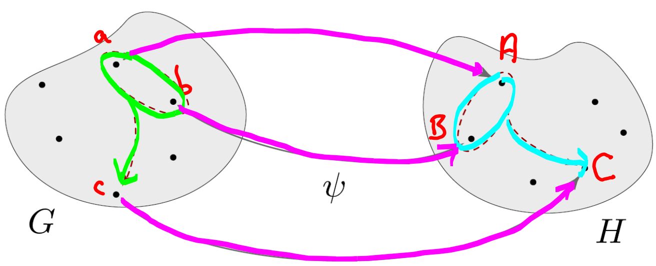
Optional: Homomorphismus

L10

$(\mathcal{G}, \cdot)$ und $(H, \bullet)$

$\underline{a \cdot b = c}$ $\underline{A \bullet B = C}$

seien zwei Gruppen mit *a priori* unabhängigen Verknüpfungsregeln.



Def: Eine Abbildung $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow H, \quad a \longrightarrow \psi(a)$ (1)

ist ein 'Homomorphismus', falls $\underbrace{\psi(\underbrace{a \cdot b}_{c})}_{C} = \underbrace{\psi(a)}_{A} \bullet \underbrace{\psi(b)}_{C} \quad \forall\, a, b \in \mathcal{G}$ (2)

'bewahrt die Form'

Beispiel: $(\mathcal{G}, \cdot) = (\mathbb{Z}, +), \quad (H, \bullet) = (\mathbb{Z}, +)$ (3)

$\psi : \mathcal{G} \to H, \quad n \longmapsto \psi(n) = 2n$ (4) ist ein Homomorphismus,

denn $\psi(n+m) = 2(n+m)$ (5) und $\psi(n) + \psi(m) = 2n + 2m = 2(n+m) \overset{\checkmark}{=} (5)$

Aber $\phi : \mathcal{G} \to H, \quad n \longmapsto \phi(n) = n^2$ (6) ist kein Homomorphismus,

denn $\phi(n+m) = (n+m)^2$ (7) $\phi(n) + \phi(m) = n^2 + m^2 = n^2 + m^2 \neq (7)$

Optional: Isomorphismus

L1P

Def: Eine Abbildung $\psi : G \longrightarrow H \, , \quad a \longrightarrow \psi(a)$ (1)

heisst ein 'Isomorphismus' ('identische Form') zwischen den Gruppen G und H ist,
falls sie ein bijektiver Homomorphismus ist. Wir schreiben dann: $G \cong H$ (2)

Isomorphe Gruppen sind praktisch 'identisch'.

$(R_{90}, \bullet) \cong (\mathbb{Z}_4, \cdot)$

Konkret: es existiert eine 1-zu-1 Zuordnung ihrer Elemente, die ihre Verknüpfungstabellen aufeinander abbildet (d.h. sie haben 'dieselbe' Verknüpfungstabelle, alle Eigenschaften der einen Gruppe gelten auch für die andere).

•	0	90	180	270
0	0	90	180	270
90	90	180	270	0
180	180	270	0	90
270	270	0	90	180

•	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Gruppentheorie: sehr wichtig in der Physik !

- Diskrete Translationen, Reflektionen (Kristallstrukturen)
- Translationen in Raum oder Zeit
- Rotationen (Quantenmechanische Theorie des Drehimpulses, Spin)
- Lorentz-Gruppe, Poincare-Gruppe (spezielle Relativitätstheorie)