

Abschlussklausur

Angaben im Stil [Vx, Fy] zu jeder Aufgabe beziehen sich auf die Vorlesungsfolien vom WS2015/2016, in der "kompletten" Fassung.
V = Vorlesungsnummer;
F = Foliennummer innerhalb der Vorlesung

Name: Musterlösung

Matrikelnummer: _____

- Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jede Seite und legen Sie Ihren Lichtbildausweis bereit.
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, zwei beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, Wörterbuch
- Bearbeitungszeit: 120 min
- Ergebnisse bitte nur auf die Aufgabenblätter (ggf. auch die Rückseiten beschreiben).
- Viel Erfolg!

Aufgabe	Erreichte Punkte	Mögliche Punkte
1		30
2		20
3		20
4		15
5		15
Σ		100

Einige nützliche Konstanten

Gravitationskonstante $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

Erdmasse $M_E = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Erdradius $R_E \approx 6400 \text{ km}$

Dichte von Luft bei Normaldruck und $T = 20^\circ\text{C}$: $1,2 \text{ kg/m}^3$

Dichte von Wasser bei Normaldruck und $T = 20^\circ\text{C}$: 1000 kg/m^3

Normaldruck: $1 \text{ atm} = 1013 \text{ mbar} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Avogadro-Konstante: $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

$1 \text{ cal (Kalorie)} = 4,1868 \text{ J}$

Name: _____

Aufgabe 1

Verständnisfragen (30 Punkte). Geben Sie kurze Antworten (1-2 Sätze, bzw. kurze Rechnung, bzw. einfache Skizze) auf die folgenden Fragen.

- a) Sie fahren mit 100 km/h auf einer Landstraße, als Sie plötzlich 55 m vor sich einen stehenden Traktor bemerken. Welche (als konstant angenommene und negative) Beschleunigung ist nötig, damit Sie gerade noch rechtzeitig vor dem Traktor zum Stehen kommen?

V2, F19

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung: $a = \text{const.}$

$$v = a \cdot t + v_0 \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} \quad \text{Zeit bis zum Stoppen.}$$

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2} a \frac{(v - v_0)^2}{a^2} + v_0 \frac{(v - v_0)}{a}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2(x - x_0)} (v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2(55 - 0) \text{ m}} \left[\left(0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \right]$$

(mit $x - x_0 = 55 \text{ m}$; $v_0 = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) $\Rightarrow -7,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

- b) Welche als konstant angenommene Bremskraft ist für die Bremsung aus der letzten Teilaufgabe nötig? Wir nehmen an, dass das Auto (mit Insassen) insgesamt 1500 kg wiegt.

V3, F15

$$F = m \cdot a = 1500 \text{ kg} \cdot \left(-7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = -1,05 \cdot 10^4 \text{ N}$$

- c) Wie groß muss der Gleitreibungskoeffizient zwischen Reifen und Straße sein, damit die Bremsung aus der letzten Teilaufgabe gelingt? Wir nehmen an, dass die Reifen während der gesamten Bremsung über die Straße gleiten.

V4, F19

$$F_{\text{Normal}} = m \cdot g$$
$$|F_{\text{Reibung}}| = \mu_{\text{Gleit}} \cdot |F_{\text{Normal}}| \Rightarrow \mu_{\text{Gleit}} = \frac{|F_{\text{Reibung}}|}{|F_{\text{Normal}}|}$$

$$\mu_{\text{Gleit}} = \frac{1,05 \cdot 10^4 \text{ N}}{1500 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{1,05 \cdot 10^4 \text{ N}}{14700 \text{ N}} = 0,71$$

- d) Zwei gleiche Eimer sind genau bis zum Rand mit Wasser gefüllt. In einem der Eimer befindet sich nur Wasser, im anderen Eimer schwimmt zusätzlich ein Stück Holz. Welcher Eimer hat das größere Gewicht?

V8, F24

Beide haben das gleiche Gewicht! Das Gewicht des vom Holz verdrängten Wassers entspricht nach dem Archimedischen Prinzip genau dem Gewicht des Holzstücks.

Name: _____

- e) Die Besatzung eines Raumschiffes, das sich mit $0,6\,c$ (c ist die Lichtgeschwindigkeit) relativ zur Erde bewegt, meldet sich bei der Bodenstation auf der Erde für ein Schläfchen von genau $1,0\,h$ ab. Wie lange dauert das Schläfchen im Bezugssystem der Erde?

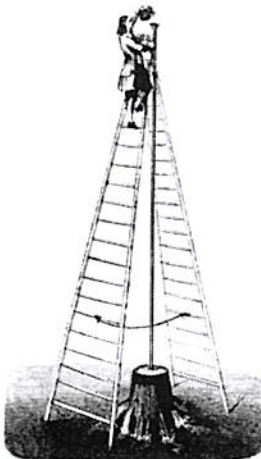
V12, F19

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1,0\,h}{\sqrt{1 - (0,6)^2}} = \underline{\underline{1,25\,h = 75\,min}}$$

(Zeitdilatation)

- f) **Pascalsches Paradoxon 1.** In seinem berühmten Versuch mit einem Fass hat *Blaise Pascal* ein langes dünnes Rohr mit einem Radius von $0,3\,cm$ vertikal in ein Weinfass eines Durchmessers von $20\,cm$ gesteckt (siehe Abbildung). Er stellte fest, dass das Fass platzte, als er das Rohr bis zu einer Höhe von $12\,m$ mit Wasser gefüllt hatte. Was war die Masse der Flüssigkeit in dem dünnen Rohr in diesem Moment?

V8, F20



$$\begin{aligned} m &= V \cdot \rho = A \cdot h \cdot \rho = \pi r^2 \cdot h \cdot \rho \\ &= \pi \cdot (0,003\,m)^2 \cdot 12\,m \cdot 1000 \frac{kg}{m^3} \\ &= \underline{\underline{0,34\,kg}} \end{aligned}$$

- g) **Pascalsches Paradoxon 2.** Was ist die vom Wasser auf den Deckel des Fasses in der letzten Teilaufgabe ausgeübte Nettokraft direkt vor dem Platzen?

V8, F21
8 F23

$$\begin{aligned} p &= \frac{F}{A} \Rightarrow F = p \cdot A = \rho \cdot g \cdot h \cdot A = \rho \cdot g \cdot h \cdot \pi R^2 \\ &= 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot 12\,m \cdot \pi \cdot (0,1\,m)^2 \\ &= \underline{\underline{3,7 \cdot 10^3\,N}} \end{aligned}$$

Name: _____

- h) Ein Fischer bemerkt, dass sein Boot alle 4,0 s von einem 0,5 m hohen Wellenkamm (= Wellenmaximum) regelmässiger Wellen getroffen wird. Er schätzt den Abstand zwischen zwei Wellenkämmen auf 9,0 m. Wie schnell sind die Wellen?

V11, F21

Wellengeschwindigkeit: $c = \frac{\lambda}{T} = \frac{9,0 \text{ m}}{4,0 \text{ s}} = \underline{\underline{2,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$

- i) Ein Tanker fährt vorbei und erzeugt eine große Welle mit einer maximalen Höhe von 2,0 m, die sich mit den gleichmässigen Wellen aus der letzten Teilaufgabe überlagert. Wie hoch ist der Wellenkamm der Gesamtwelle an der Stelle des Fischerbootes maximal? Wie hoch minimal? Sie können Reibungsverluste vernachlässigen.

V11, F21

Höhe maximal: $2,0 \text{ m} + 0,5 \text{ m} = 2,5 \text{ m}$
(komplett) konstruktive Interferenz

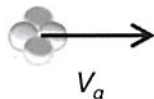
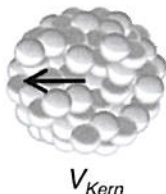
Höhe minimal: $2,0 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = 1,5 \text{ m}$
(vollständig) destruktive Interferenz

[Wichtig: Es geht um die Höhe der Wellenkämme = Maxima!] Interferenz

- j) Ein Atomkern in Ruhe zerfällt radioaktiv in ein α -Teilchen und einen kleineren Atomkern. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Atomkernes nach dem Zerfall (siehe Abbildung), wenn die Geschwindigkeit des α -Teilchen $2,5 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ beträgt? Nehmen Sie an, dass die Masse des Kerns nach dem Zerfall 57 mal größer ist als die des α -Teilchens.

V6, F16

Impulserhaltung!



$$m_\alpha v_\alpha + m_K v_K = 0$$

$$\Rightarrow v_K = - \frac{m_\alpha}{m_K} v_\alpha$$

$$= - \frac{1}{57} \cdot 2,5 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$= - \underline{\underline{4,39 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Name: _____

Aufgabe 2

Planet Nine (20 Punkte). Zwei Astrophysiker vom *Caltech* machten im Januar 2016 mit der Ankündigung Schlagzeilen, einen weiteren Planeten in unserem Sonnensystem entdeckt zu haben. Dieser vorläufig *Planet Nine* genannte Planet soll eine Masse von 10 Erdmassen und einen Radius $R = 20\,000\text{ km}$ haben. Sie planen eine wissenschaftliche Mission zu diesem Planeten. Im Folgenden können Sie Reibungseffekte und die Gravitation anderer Himmelskörper vernachlässigen.

- a) Nach Ankunft bei *Planet Nine* wollen Sie den Planeten zunächst auf einer Umlaufbahn umrunden. Stellen Sie eine Gleichung für die Umlaufdauer stabiler kreisförmigen Umlaufbahnen auf. Wie lange dauert eine Umrundung von *Planet Nine* in der sicheren Höhe von 100 km über seiner Oberfläche?

Für stabile Umlaufbahn:

$$F_{\text{Gravitation}} = F_{\text{Zentripetal}}$$

$$\frac{GM_p m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

r = Radius der Umlaufbahn, vom Mittelpunkt

M_p = Masse des Planet Nine

$$\text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow GM_p = \frac{(2\pi)^2}{T^2} r^3$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_p} r^3}$$

$$= \left(\frac{4\pi^2 [(20000 + 100) \cdot 10^3 \text{ m}]^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 10 \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}} \right)^{1/2}$$

$$= 8,97 \cdot 10^3 \text{ s} = 150 \text{ min} = \underline{\underline{2,5 \text{ h}}}$$

~~V5, F11~~
V5, F15

Name: _____

- b) Nach Landung auf dem Planeten führen Sie wissenschaftliche Experimente durch, darunter auch das beliebte Experiment zum mathematischen Pendel. Was ist die Schwingungsdauer eines $L = 1$ m langen Pendels auf der Oberfläche von Planet Nine?

V5, F12

$$g = \frac{G M_P}{R_P^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{10 \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(20 \cdot 10^6 \text{ m})^2}$$
$$= 9,96 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Schwingungsdauer Pendel:

$$T = 2\pi \sqrt{L/g} = 2\pi \sqrt{\frac{1,0 \text{ m}}{9,96 \text{ m/s}^2}} = \underline{\underline{2,0 \text{ s}}}$$

V10, F15

- c) Nach dem Ende der Experimente wollen Sie den Planeten wieder verlassen. Was ist die Fluchtgeschwindigkeit für Planet Nine, d.h. die Geschwindigkeit, die ausreichend ist, die Oberfläche des Planeten zu verlassen und seinem Gravitationsfeld vollständig („ins Unendliche“) zu entkommen?

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \stackrel{!}{=} 0$$

V6, F10

$$\frac{1}{2} m v_F^2 + \left(- \frac{G M_P m}{R_P} \right) = 0$$

$$\Rightarrow v_F = \sqrt{2G \frac{M_P}{R_P}}$$

$$= \left(2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot \frac{10 \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{20 \cdot 10^6 \text{ m}} \right)^{1/2}$$

$$= \underline{\underline{2,0 \cdot 10^4 \text{ m/s}}} = \underline{\underline{20 \frac{\text{km}}{\text{s}}}}$$

Name: _____

Aufgabe 3

Molekulardynamik (20 Punkte). In sogenannten Molekulardynamiksimulationen werden Atome als Punktmassen und chemische Bindungen als elastische Federn dargestellt. Wir betrachten hier ein Wasserstoffatom ($m_H = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$), das über eine Einfachbindung an ein wesentlich schwereres Molekül gebunden ist. Wir können hier die Bewegung des größeren Moleküls vernachlässigen und die Einfachbindung als harmonische Feder mit einer Federkonstante von (in den in Molekulardynamiksimulationen üblichen Einheiten) $k_H = 170 \text{ Å}^{-2} \cdot \text{kcal/mol}$ annehmen.

V2, F3

V6, F3

a) Geben Sie den Wert der Federkonstante k_H in SI Einheiten an.

$$k_H = 170 \frac{\text{kcal/mol}}{\text{Å}^2} \cdot \frac{4187 \text{ J}}{\text{kcal}} \cdot \frac{1 \text{ mol}}{6 \cdot 10^{23}} \cdot \left(\frac{10^{10} \text{ Å}}{1 \text{ m}} \right)^2$$
$$= \underline{\underline{118,6 \frac{\text{N}}{\text{m}}}}$$

b) Was ist die Periodendauer der Schwingung des Wasserstoffatoms?

V10, F10

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$
$$T_H = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{118,6 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}}}$$
$$= 2,36 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$
$$= \underline{\underline{23,6 \text{ fs}}}$$

Name: _____

- c) In Molekulardynamiksimulationen werden die Newtonschen Bewegungsgleichungen numerisch gelöst, indem man die Zeit in kleine Intervalle (sogenannte Integrationszeitschritte) δt einteilt und für jeden Zeitschritt nacheinander die aktuellen Positionen der Atome berechnet. Als Faustregel muss man δt dabei so wählen, dass der Integrationszeitschritt mindest 10 mal kleiner ist als die kürzeste Schwingungsperiode im simulierten System. Was für einen Integrationszeitschritt muss man nehmen, wenn wir davon ausgehen, dass die oben berechnete Wasserstoffschwingung die kürzeste Schwingungsperiode im simulierten System ist (Falls Sie Teilaufgabe b nicht lösen konnten, rechnen Sie mit $T_H = 10$ fs weiter)? Wie viele Integrationschritte muss man berechnen, um insgesamt 1 ns zu simulieren? Wie viele Schritte um 1 s zu simulieren?

V1, F32

$$\delta t = \frac{T_H}{10} = 2,36 \text{ fs}$$

$$\text{Für } 1 \text{ ns} : N = \frac{1 \text{ ns}}{\delta t} = \frac{10^{-9} \text{ s}}{2,36 \cdot 10^{-15} \text{ s}} = 4,2 \cdot 10^5$$

$$\text{Für } 1 \text{ s} : N = \frac{1 \text{ s}}{\delta t} = \frac{1 \text{ s}}{2,36 \cdot 10^{-15} \text{ s}} = 4,2 \cdot 10^{14}$$

Alternativ: $T_H = 10 \text{ fs} \Rightarrow \delta t = 1 \text{ fs}$

Für 1 ns: 10^6 Schritte Für 1 s: 10^{15} Schritte

- d) In Molekulardynamiksimulationen werden manchmal die Wasserstoffmassen auf einen höheren als den eigentlichen Wert gesetzt (z.B. auf $10 \cdot m_H$). Warum?

Wegen $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ und $\delta t = \frac{T}{10} \sim T_m$ bedeutet eine höhere Wasserstoffmasse, dass die Schwingungsperiode größer wird, somit der erlaubte Zeitschritt größer wird und somit weniger Zeitschritte nötig sind, um eine bestimmte Simulationszeit zu berechnen.

Name: _____

Aufgabe 4

Warmwasserdruck (15 Punkte). Wasser strömt durch die Rohre der Warmwasseranlage eines Hauses. Im Keller wird das Wasser mit einer Strömungsgeschwindigkeit von 0,5 m/s und einem Druck von 3,0 bar durch das Hauptrohr der Anlage gepumpt, das einen Durchmesser von 4,0 cm hat. Sie können das Wasser in der Anlage als ideales Fluid annähern.

V9, F10

- a) Wie lange dauert es, bis der gesamte Warmwasservorrat von 100 l einmal durch die Hauptleitung gepumpt wird?

Volumenflussrate: $\frac{\Delta V}{\Delta t} = A \cdot v \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta V}{A \cdot v}$

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{A \cdot v} = \frac{0,1 \text{ m}^3}{\pi (0,02 \text{ m})^2 \cdot 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 159 \text{ s}$$

- b) In der zweiten Etage, 5,0 m über dem Keller, hat das Rohr des Warmwasserkreislaufes einen Durchmesser von 2,6 cm. Wie groß ist die Strömungsgeschwindigkeit in diesem Rohr?

V9, F10

Für ideales Fluid:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1$$

$$v_{2, \text{stock}} = \frac{\pi (0,02 \text{ m})^2}{\pi (0,013 \text{ m})^2} \cdot 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

V9, F12

- c) Wie groß ist der Druck im Rohr in der zweiten Etage?

Nach Bernoulli: $p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$

$$\Rightarrow p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) + \rho \cdot g (h_1 - h_2)$$

$$= 3 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} + \frac{1}{2} 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left(\left(0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right) +$$

$$1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (-5 \text{ m})$$

$$= 3 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} - 595 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} - 4,9 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$= \underline{\underline{2,5 \cdot 10^5}} = \underline{\underline{2,5 \text{ bar}}}$$

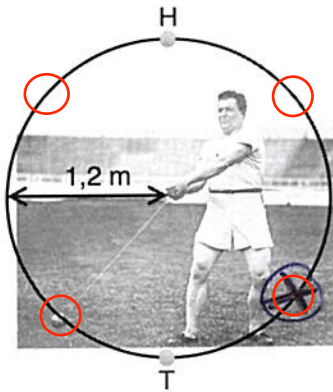
Name: _____

Aufgabe 5

Hammerwurf (15 Punkte). Beim Hammerwurf besteht der „Wurfhammer“ aus einer 7 kg schweren Metalkugel an einem 1,2 m langen Drahtseil (das wir hier als masselos annähern). Wir betrachten einen Athleten, der seinen Wurfhammer auf einer kreisförmigen und vertikalen Bahn schwingt (siehe Abbildung).

14,711

- a) Mit welcher Geschwindigkeit muss sich die Kugel am höchsten Punkt **H** mindestens bewegen, damit gerade noch Spannung im Seil ist?



$$|F_{\text{Zentripetal}}| = |F_{\text{grav}}|$$

$$m \cdot \frac{v_{\text{min}}^2}{r} = m \cdot g$$

$$\Rightarrow v_{\text{min}} = \sqrt{g \cdot r}$$

$$= \sqrt{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,2 \text{ m}}$$

$$= 3,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Im Aufgabenteil c gibt es 4 richtige Antworten (wobei einige weniger sinnvoll sind als andere...)

- b) Welche Zugkraft muss das Seil aushalten, wenn sich die Kugel am tiefsten Punkt **T** befindet und sich mit einer Geschwindigkeit von $v = 10 \text{ m/s}$ bewegt?

Am tiefsten Punkt sind F_{grav} und $F_{\text{Zentripetal}}$ gegen die Seilspannung gerichtet:

$$F_{\text{Seil}} \geq m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{r} = 7 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 7 \text{ kg} \cdot \frac{(10 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{1,2 \text{ m}}$$

$$= 68,6 \text{ N} + 583,3 \text{ N}$$

$$= \underline{\underline{652 \text{ N}}}$$

- c) Markieren Sie in der Abbildung den Punkt (mit einem Kreuz), an dem sich die Kugel in dem Moment befindet, an dem der Athlet den Wurfhammer loslassen muss, damit die Kugel in einem 45° Winkel zur Horizontalen wegfliegt.