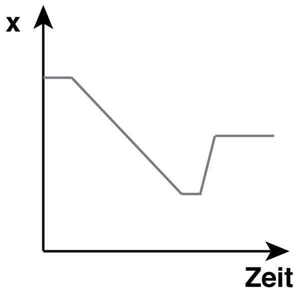
Lösung der Übungsklausur

Aufgabe 1
Verständnisfragen (30 Punkte).

a) Zeichnung:



Erklärung: Wenn die Person ,,steht" oder an einem Ort ,,bleibt" ist x konstant als Funktion der Zeit. Bewegung von 3 nach 1 ist in negative x-Richtung. Ist die Bewegung ,,langsam", dann ist die Steigung eher flach; ,,schnell rennen" entspricht einer größeren Steigung.

b) Die Geschwindigkeiten sind gleich, da sich die Massen der Satelliten aus der Bedingung für stationäre Bahnen rauskürzen (und nur von der Höhe -d.h. dem Radius der Bahn- abhängen).

Erklärung: Für eine stationäre Bahn gilt

$$F_{\text{Gravitation}} = F_{\text{Zentripetal}} \rightarrow G\frac{M_{\text{Erde}} m_S}{R^2} = m_S \frac{v^2}{R} \tag{1}$$

Die Masse des Satelliten m_S kürzt sich raus. Siehe z.B. Vorlesung 5, Folie 16.

c) Spieler 3 muss mit 141 N in Richtung T3 ziehen.

Erklärung: ,,Kein Spieler gewinnt" bedeutet, dass sich der Ring nicht bewegt, d.h. dass sich alle Kräfte genau aufheben und die Gesamtkraft Null ist. Das bedeutet, dass sowohl in x als auch in y-Richtung die Gesamtkraft verschwindet. In x-Richtung haben sich offensichtlich die Beiträge des oberen beiden Kräfte auf. In y-Richtung muss T3 genau die y-Komponenten der oberen beiden Kräfte aufheben; diese sind jeweils 100 N $\cdot \sin(45°) \approx 70,7$ N; zusammen also ≈ 141 N. T3 muss das genau aufgeben, somit muss Spieler 3 mit -141 N ziehen, bzw. mit 141 N in Richtung T3 ziehen. Vergleiche die ,,allgemeine Lösungsstrategie" auf Folie 3 von Vorlesung 4 und die Diskussion der Gleichgewichtsbedingung auf Folie 5 von Vorlesung 8.

d) g_X ist 4 Mal größer als g auf der Erde.

Erklärung: Allgemein gilt

$$g = G\frac{M_{\text{Planet}}}{R^2_{\text{Planet}}} \tag{2}$$

Mit gleicher Masse und halben Radius ist g 4-fach größer. Die Gravitationsbeschleunigung ist der ,,Vorfaktor", d.h. alles bis auf die Masse des kleineren Objekts, in Newtons Gravitationsgesetz. Siehe Vorlesung 5, Folie 13.

e) Ein solcher Zusammenstöß ist nicht möglich! Zwar erfüllen die angegebenen Werte die Impulserhaltung; die kinetische Energie vor dem Stoß ist aber $\frac{1}{2}(10m)v^2 = 5mv$; die kinetische Energie nach dem Stoß ist $\frac{1}{2}m(10v)^2 = 50mv$. Wo soll die Extra-Energie herkommen?

   Erklärung: Beim unelastischen Stoß ist die kinetische Energie nachher immer kleiner als vorher (siehe Folie 18 von Vorlesung 6); beim elastischen Stoss ist sie erhalten (siehe Folie 19 von Vorlesung 6).

f) Es gilt $\omega_L < \omega_S$.

   Erklärung: Nach einer vollen Umdrehung des kleinen Rades hat es den Riemen um eine Distanz $2\pi R_{klein}$ weiterbewegt. Der Riemen am großen Rad hat sich um die gleiche Distanz weiterbewegt und das große Rad um diese Distanz gedreht, was aber wesentlich weniger als einer vollen Umdrehung des großen Rades entspricht, da $R_{gross} > R_{klein}$, d.h. in der Zeit in der das kleine Rad eine volle Umdrehung macht, macht das große Rad nur einen Bruchteil einer Umdrehung. Beim Fahrrad fahren drehen wir im übrigen am größeren Rad des Kettenantriebs (und können das Antriebsrad entsprechend schneller drehen lassen, ohne ganz schnell treten zu müssen)!

g) Das Trägheitmoment verdoppelt sich.

   Erklärung: Wir müssen beachten, dass die Masse nur linear, der Abstand zur Rotationsachse aber quadratisch in das Trägheitsmoment eingehen (Siehe Vorlesung 7, Folie 13 und 14). Zunächst haben wir

$$I_A = \sum_i m_i r_i^2 = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2 \tag{3}$$

   Nach der Änderung haben wir

$$I_B = \sum_i m_i r_i^2 = \frac{m}{2}(L)^2 + \frac{m}{2}(L)^2 = mL^2 = 2I_A \tag{4}$$

h) Die Periodendauer ändert sich nicht!

   Erklärung: Die Amplitude hat keinen Einfluss auf die Periodendauer. Die Periodendauer ist durch $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ gegeben. Wenn sowohl k als auch m verdoppelt werden, ändert sich die Periodendauer nicht. Vergleiche Vorlesung 10, Folie 9.

i) Die Energie wird 8 Mal größer.

   Erklärung: Betrachten wir den Punkt maximaler Auslenkung; dort ist die Geschwindigkeit Null und somit $E_{kin} = 0$ und E_{pot} maximal, nämlich

$$E_{pot,max} = E_{mech} = \frac{1}{2}kA^2 \tag{5}$$

   Wenn A und k verdoppelt werden, so ergibt sich insgesamt ein Faktor 8. Vergleiche Vorlesung 10, Folie 13.

j) Der Wasserspiegel ändert sich nicht.

   Erklärung: Die Masse der Wassermoleküle, die den Eiswürfel ausmachen, ändert sich auch nach dem Schmelzen nicht. Vor dem Schmelzen verdrängt der Eiswürfel ein Volumen an (flüssigem) Wasser, das seinem Gewicht entspricht (Vorlesung 9, Folien 4-6). Nach dem Schmelzen hat sich das Eis in ein Volumen an Wasser verwandelt, das diesem gleichen Gewicht entspricht.

Aufgabe 2

Kreisbewegung, revisited (15 Punkte).

a) Für die x-Richtung haben wir

$$\frac{dx}{dt} = v_x = -R \cdot \omega \cdot \sin(\omega t); \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a_{x,Z} = -R \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) \tag{6}$$

Für die y-Richtung folgt

$$\frac{dy}{dt} = v_y = R \cdot \omega \cdot \cos(\omega t); \quad \frac{d^2y}{dt^2} = a_{y,Z} = -R \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \tag{7}$$

b) Position:

$$\vec{r}(t=0) = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

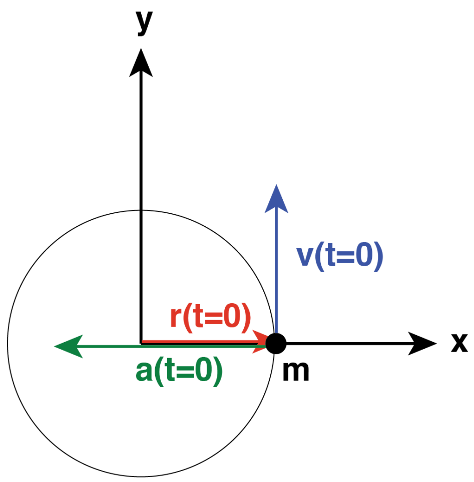
Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ R\omega \end{pmatrix}$$

Beschleunigung:

$$\vec{a_Z}(t=0) = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeichung:



c) Benutze die Definition des Betrages eines Vektors und die trigonometrische Identität, dass $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$:

$$|a_Z| = \sqrt{a_{x,Z}^2 + a_{y,Z}^2} = \sqrt{R^2\omega^4 cos^2(\omega t) + R^2\omega^4 sin^2(\omega t)} \tag{8}$$

$$\rightarrow |a_Z| = \sqrt{R^2\omega^4 \left(cos^2(\omega t) + sin^2(\omega t)\right)} = \sqrt{R^2\omega^4} = \omega^2 \cdot R \tag{9}$$

Dies ist eine alternative Herleitung der Zentripetalbschleunigung, die wir auf Folie 7, Vorlesung 4 geometrisch hergeleitet haben.

Aufgabe 3

Landung auf dem Kometen Tschurjumow-Gerassimenko (15 Punkte). Diese Aufgabe wurde durch die Landung der ESA Sonde *Philae* auf dem Kometen *Tschurjumow-Gerassimenko* am 12. November 2014 inspiriert. In Wirklichkeit ist der Komet nicht kugelförmig und nicht in Ruhe, die Rechnung unten liefert aber eine interessante Abschätzung.

a) Zur Herleitung der Fluchtgeschwindigkeit setzten wir die Summe aus kinetischer Energie plus der potentiellen Energie der Gravitation gleich Null, denn im Unendlichen ist dann sowohl die potentielle als auch die kinetische Energie Null (siehe Vorlesung 6, Folie 11).

$$\frac{1}{2}mv_F^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = 0 \tag{10}$$

Daraus folgt

$$v_F = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = 0 \tag{11}$$

b) Einsetzen der Werte liefert $v_F = 0{,}94$ m/s.

c) Wir haben hier die Situation eines elastischen Stoßes mit ,,schwerem Ziel" (Folie 20 aus Vorlesung 6). Dabei gilt für die Geschwindigkeit der Sonde nach dem Stoß u

$$u \approx -v \tag{12}$$

v darf also maximal 0,94 m/s betragen, sonst fliegt die Sonde nach dem Stoß mit (mehr als) Fluchtgeschwindigkeit vom Kometen weg.

d) Dies ist die Situation des unelastischen Stoßes (Vorlesung 6, Folie 18). Sonde und Komet fliegen nach dem Stoß mit

$$u \approx \frac{m}{m+M}v = \frac{100}{100+10^{13}}10\text{ m/s} = 10^{-10}\text{ m/s} \tag{13}$$

gemeinsam weiter, eine kaum/nicht messbare Geschwindigkeit.

Aufgabe 4

Janus-Teilchen (20 Punkte).
Dies ist das Teilchen aus Vorlesung 4, Folie 4; das Beispiel und die Aufgabe sind durch Arbeiten an solchen Janus-Teilchen am Lehrstuhl von Prof. Feldmann (Fakultät für Physik, LMU) inspiriert. Der Radius des Teilchen ist $D/2$ (halber Durchmesser).

a) Schwerkraft, die auf des Teilchen wirkt:

$$F_g = m \cdot g = \rho_{SiO_2} \cdot V \cdot g = \rho_{SiO_2} \cdot \frac{4}{3}\pi(D/2)^3 \cdot g \tag{14}$$

Auftriebskraft, die auf das Teilchen wirkt, ist gleich der Gewichtskraft des verdrängten Fluides (vergleiche Vorlesung 9, Folie 4):

$$F_A = m_F \cdot g = \rho_{H_2O} \cdot V \cdot g = \rho_{H_2O} \cdot \frac{4}{3}\pi(D/2)^3 \cdot g \tag{15}$$

Die resultierende Kraft zeigt nach unten (in Richtung der Schwerkraft) und beträgt:

$$F_{Res} = F_g - F_A = (\rho_{SiO_2} - \rho_{H_2O}) \cdot \frac{4}{3}\pi(D/2)^3 \cdot g \approx 1,84 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{N} = 18,4\ \mathrm{fN} \tag{16}$$

b) Die Goldschicht hat ein Volumen von $V_{Au} \approx \frac{1}{2}d \cdot 4\pi(D/2)^2$ ($\frac{1}{2}$ da nur eine Hälfte der Kugel mit Gold beschichtet ist; ansonsten Oberfläche der Kugel $4\pi R^2$ mal Dicke der Schicht d). Die resultierende Kraft aus Auftrieb und Schwerkraft auf die Goldkomponente beträgt:

$$F_{Res,Au} = (\rho_{Au} - \rho_{H_2O}) \cdot V_{Au} \cdot g \approx 2,4 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{N} = 2,4\ \mathrm{fN} \tag{17}$$

Die gesamte resultierende Kraft ist somit ≈ 18,4 + 2,4 fN ≈ 20,8 fN.

c) Die finale Sinkgeschwindigkeit (oder *Sedimentationsgeschwindigkeit*) können wir bestimmen, in dem wir die Kraft durch die Stokes-Reibung mit der gesamten resultierenden Kraft gleichsetzten und nach der Geschwindigkeit auflösen (vergleiche Vorlesung 9, Folie 17):

$$6\pi\eta(D/2)v_S = F_g - F_A = (\rho_{SiO_2} - \rho_{H_2O}) \cdot \frac{4}{3}\pi(D/2)^3 \cdot g + (\rho_{Au} - \rho_{H_2O}) \cdot V_{Au} \cdot g \tag{18}$$

Wir setzten die bereits ausgerechnete resultierende Kraft ein und erhalten

$$v_S \approx \frac{20,4\ \mathrm{fN}}{6\pi\eta(D/2)} \approx 1,7 \cdot 10^{-6}\mathrm{m/s} = 1,7\ \mu\mathrm{m/s} \tag{19}$$

d) Laminare Stokesreibung ist dann gegeben, wenn die Reynoldszahl für das untersuchte Problem klein ist, d.h. $Re \ll 1$ (vergleiche Vorlesung 5, Folie 8). Für die beschriebene Situation haben wir

$$Re \approx \frac{\rho_{H_2O} v_S D}{\eta} \approx \frac{1000\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 1\ \mu\mathrm{m/s} \cdot 1\ \mu\mathrm{m}}{0.001\ \mathrm{Pa\ s}} \approx 10^{-6} \tag{20}$$

Beachten Sie, dass Faktoren wie 2 oder π für diese Aussage hier keinerlei Rolle spielen.

Aufgabe 5

Wasserlassen im Tierreich (20 Punkte). Diese Aufgabe wurde durch den Artikel "Duration of urination does not change with body size" von Patricia J. Yang *et al.*, *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* (2014) motiviert. Der Artikel ist auf der Webseite verlinkt.

a) Der Druck direkt vor dem Ausgang der Harnröhre ist durch die Summe aus Schweredruck und Blasendruck gegeben; nach Bernoulli ist dieser Druck gleich dem Staudruck beim Ausströmen direkt hinter dem Ausgang der Harnröhre (vergleiche Folie 11, Vorlesung 9):

$$p_{\text{bladder}} + \rho g L = \frac{1}{2}\rho v^2 \tag{21}$$

Somit ist die Ausströmgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2p_{\text{bladder}}}{\rho} + 2gL} \tag{22}$$

b) Die Zeit zum Entleeren der Blase ist einfach das Volumen geteilt durch die (konstante) Volumenflußrate:

$$T = \frac{V}{\frac{dV}{dt}} = \frac{V}{A \cdot v} = \frac{V}{\frac{\pi}{4}D^2\sqrt{\frac{2p_{\text{bladder}}}{\rho} + 2gL}} \tag{23}$$

Dabei ist die Querschnittsfläche der Harnröhre A $=\frac{\pi}{4}D^2$.

c) Wenn wir Werte für einen Menschen einsetzen erhalten wir:

$$T \approx \frac{300 \cdot 10^{-6}m^3}{\frac{\pi}{4}(0.003m)^2\sqrt{\frac{2\cdot 5\cdot 10^3 Pa}{1000kg/m^3} + 2 \cdot 9.8m/s^2 \cdot 0.2m}} \approx 11s \tag{24}$$

d) Für kleine Tiere sind der Beiträge der viskosen Reibung im Fluid und der Kapillarkraft in der Harnröhre weitere wichtige Faktoren. Nach Hagen-Poiseuille ist die Volumenflussrate durch eine Röhre mit Radius R und mit viskoser (und laminarer) Strömung $\propto R^4$ (vergleiche Vorlesung 9, Folie 18); für dünne Harnröhren (kleines D) sind die viskosen Effekte also sehr wahrscheinlich relevant. Die Kapillarkraft ist umgekehrt proportional zur Dicke der Harnröhre, d.h. $\propto 1/R$ bzw. $\propto 1/D$ (vergleiche Vorlesung 9, Folie 21); auch hier erwarten wir also, dass der Effekt für kleine D wichtig wird.