PN1
Besprechung der 9. Vorlesung

10.01.2022

Prof. Dr. Jan Lipfert und Prof. Dr. Ralf Jungmann

WS 2021/2022

Wiederholungsfrage

Die Graphen zeigen verschiedene Größen einer harmonischen Schwingung (z.B. Federpendel).
Welches ist die richtige Zuordnung (für I bis IV)?

A) E_{gesamt}, E_{kin}, E_{pot}, x

B) x, E_{kin}, E_{pot}, ω

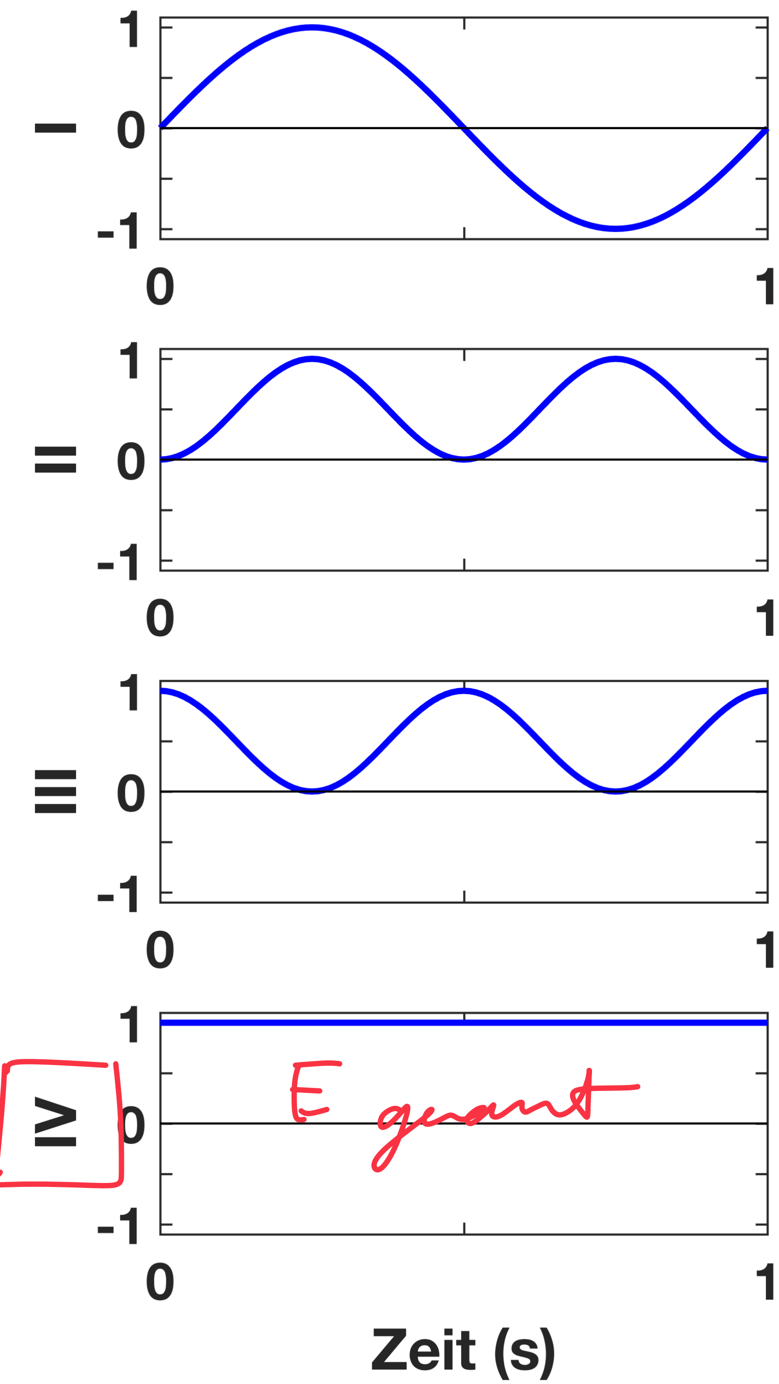
C) x, E_{pot}, E_{kin}, E_{gesamt}

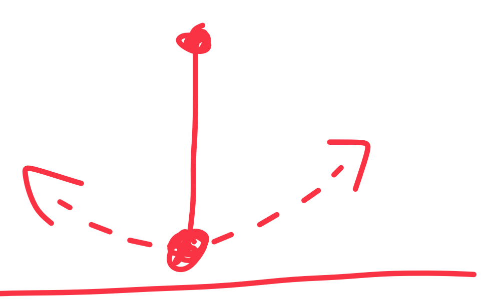
D) x, E_{kin}, E_{pot}, E_{gesamt}

E_{pot}

E_{kin}

E_{gesamt}





I $x(t) = A \cdot \sin(\omega t)$

Wiederholung: Harmonische Schwingung

System mit einer linearen Rückstellkraft, d.h. der Form:
Rückstellkraft = - (positive Konstante) * (Auslenkung)
führt harmonische Schwingungen um seine Ruhelage aus

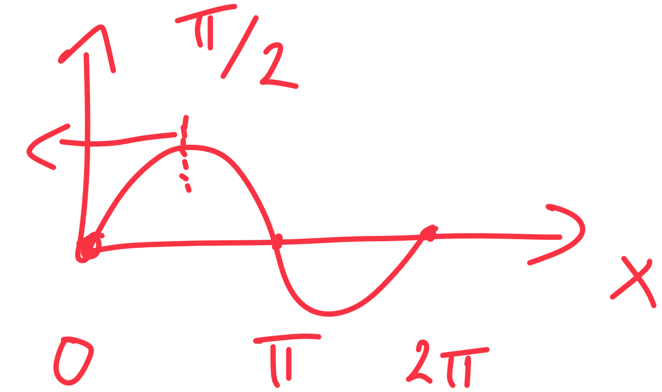
$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$; $F = -k \cdot x$ (Hooke)

→ Kräftegleichgewicht: $\boxed{m\ddot{x} = kx}$

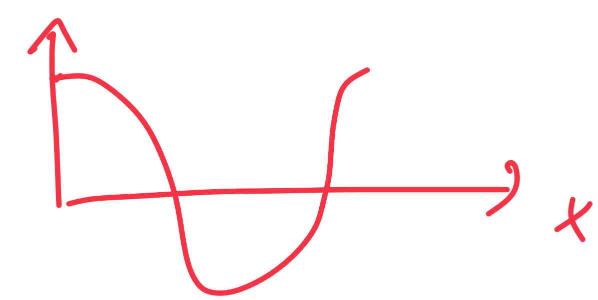
DGL: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Lösungen: $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

↳ $\varphi = \frac{\pi}{2}$



$\Rightarrow x(t) = A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t)$



·) Komplexer Ansatz:

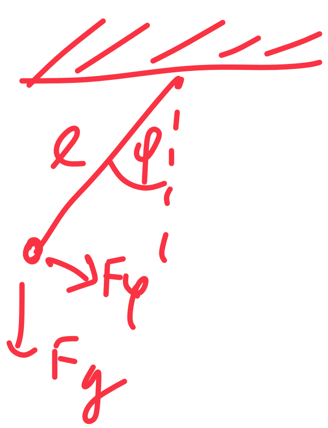
$$x(t) = C\cdot e^{\lambda t} \quad ; \quad \ddot{x}(t) = c\cdot \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\to C\cdot e^{\lambda t}\cdot \omega_0^2 + c\cdot \lambda^2 e^{\lambda t} = 0$$

$$\boxed{; \ \lambda^2 = -\omega_0^2 \quad \Rightarrow \lambda = \pm i\omega_0}$$

$$\boxed{x(t) = c_1\cdot e^{i\omega_0 t} + c_2\cdot e^{-i\omega_0 t}}$$

$\sin\varphi \approx \varphi$



$$F_\varphi = -m\cdot g\cdot \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\cdot \sin\varphi = 0}$$

Taylor: $\sin\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} \dots$

$$\boxed{\sin\varphi = \varphi}$$

$\varphi \ll 2\pi$: $\varphi < 23^\circ \to$ Fehler $\approx 1\%$

Wiederholung: Gedämpfte Schwingung

System mit einer $\underbrace{\text{linearen Rückstellkraft}}$ und $\underline{\text{linearem Reibungsterm}}$

$F = m\cdot a = m\cdot\ddot{x}$; $F = -kx$;

$F = -b\dot{x}$ (Stokes)

→ $6\pi\eta\cdot r$ für Kugel

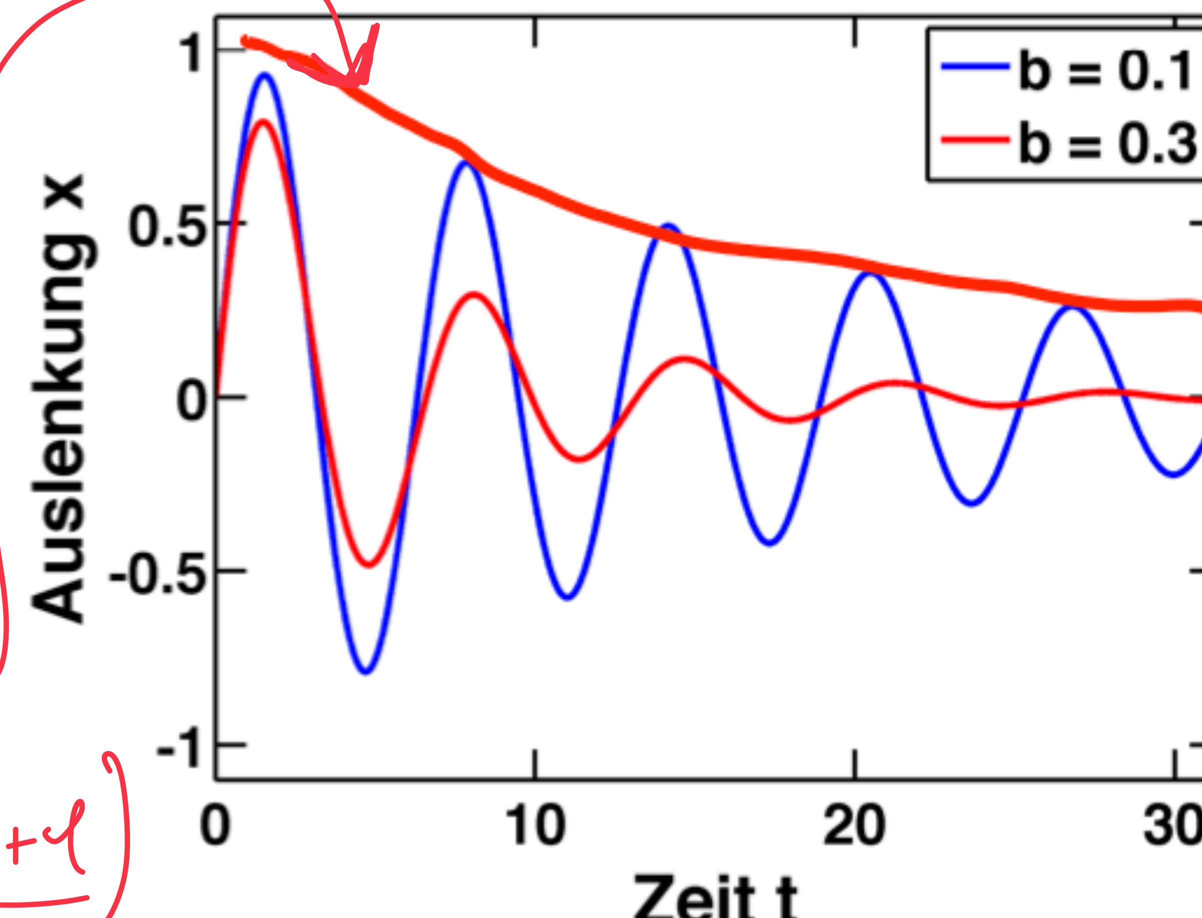
DGL: $\boxed{\ddot{x} + \frac{b}{m}\cdot\dot{x} + \frac{k}{m}\cdot x = 0}$

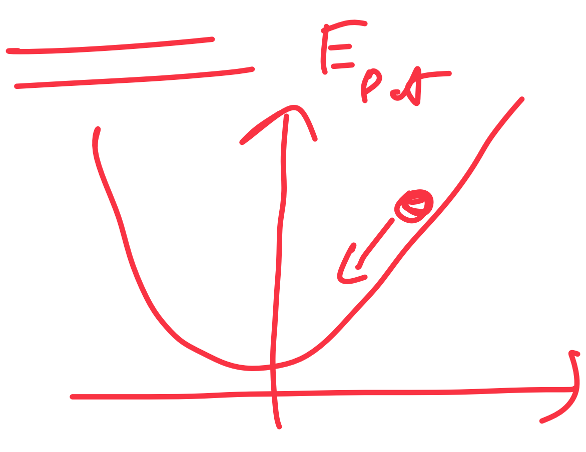
Lösung: $x(t) = \boxed{A\cdot e^{-\delta t}}\cdot\sin(\omega' t+\varphi)$

Einhüllende

$\boxed{\delta = \frac{b}{2m}}$

$\boxed{\omega'^2 = \omega^2 - \delta^2}$ ←





$E_{pot} = \frac{1}{2}Dx^2$

$F = -Dx$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

Quadr. Potential

⇕

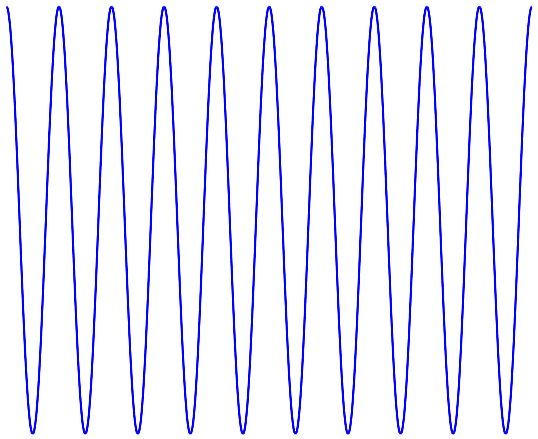
lineare Kraft (rückstellend)

⇕

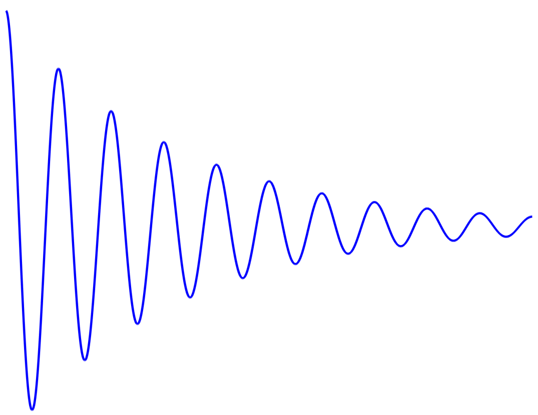
harmonische Schwingung

Klassifizierung

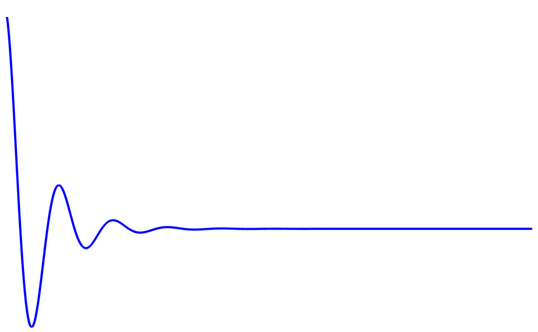
Grenzfälle



$\omega'^2 = \omega^2$; $\delta^2 = 0$ ungedämpfte Schwingung

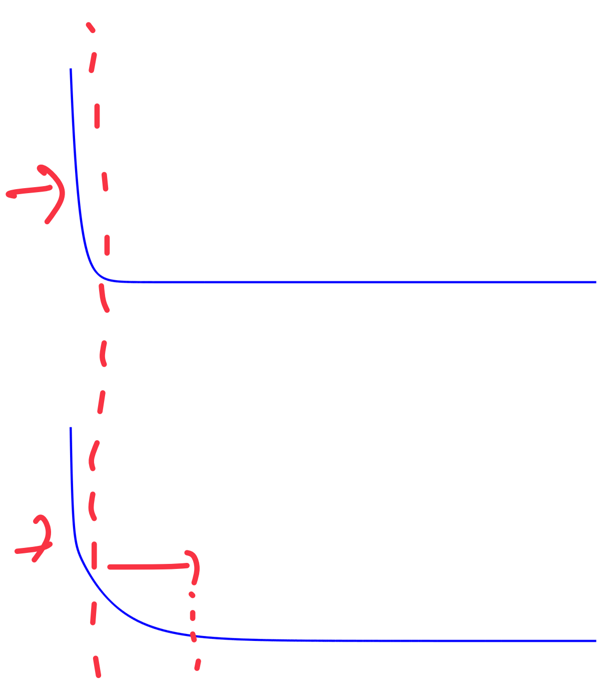


$\delta^2 < \omega^2$



$\delta^2 < \omega^2$

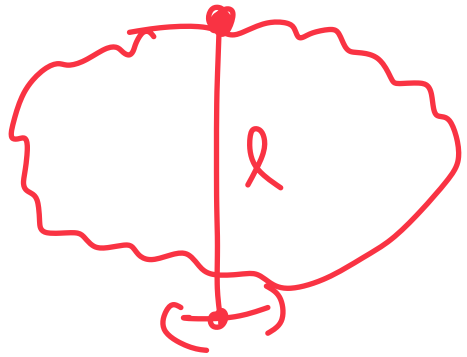
} gedämpfte Schwingung



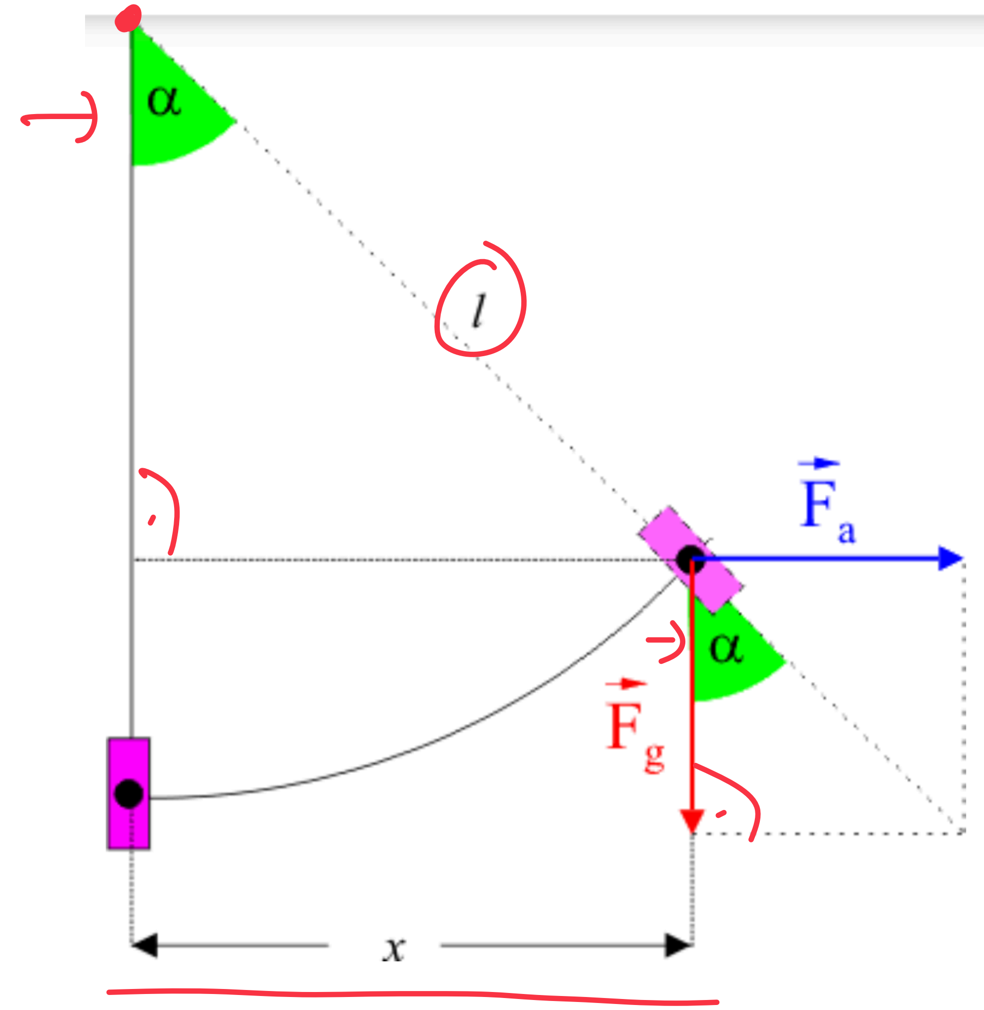
→ aperiodischer Grenzfall $\delta^2 = \omega^2$

→ Kriechfall: $\delta^2 > \omega^2$

Höhenbestimmung



Bestimmung von l



① **Statische Messung:**

$|\vec{F}_a|$, $|\vec{F}_g|$, x

$$\sin\alpha = \frac{x}{l} \quad ; \quad \tan\alpha = \frac{F_a}{F_g}$$

$\Rightarrow$ α klein: $\quad \sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{l} \approx \frac{F_a}{F_g}$

$$\Rightarrow \boxed{l = x \cdot \frac{F_g}{F_a}}$$

② **Dynamisch:** über T : $\quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$

$$\Rightarrow \boxed{l = \frac{g \cdot T^2}{4\pi^2}}$$

Prallender Ball ohne Energieverlust

:) Gesucht: $\boxed{t_{\text{gesamt}}}$; $v(h) = 0$; k ; r

3 Teilbewegungen:

1. Freier Fall: $\boxed{s = h - 2r}$
2. Harmonische Schwingung
3. Wurf

t_1: $s = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{g}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot (h - 2r)}{g}}$

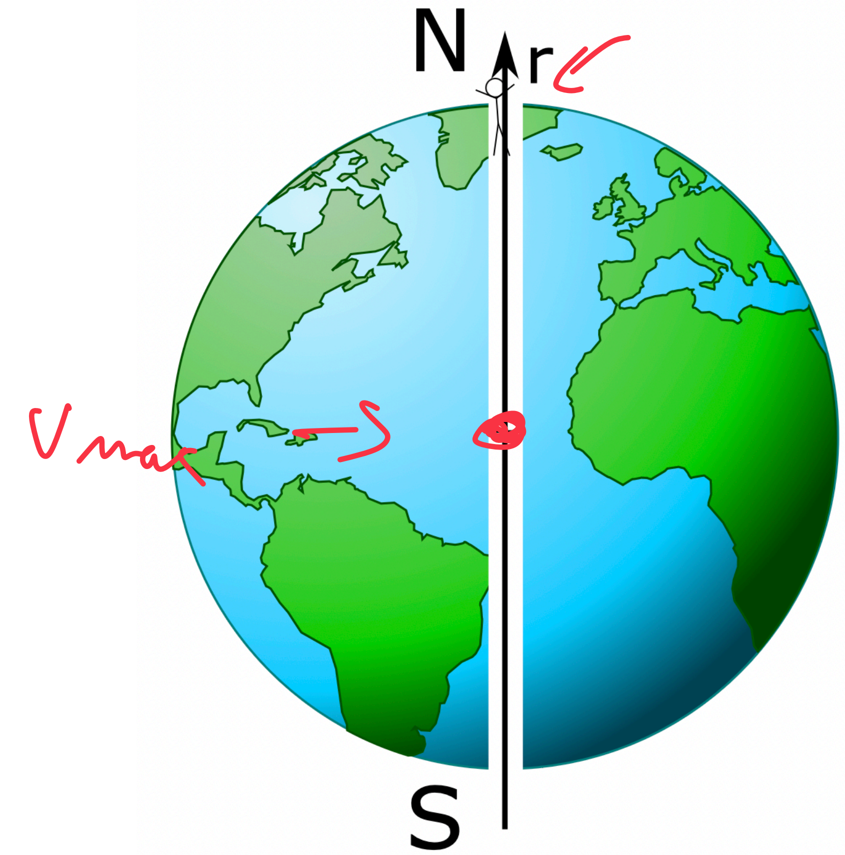
t_2: $2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$

t_3: $t_3 = t_1$ $\Rightarrow$ $\boxed{t_g = 2 \cdot t_1 + t_2}$

$R = 6{,}37 \cdot 10^3\ km$

$M = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg$

$m = 55\ kg$



·) Harmonische Schwingung:

$F_g \sim r \Rightarrow r(t) = R \cdot \cos \omega t$

Bestimme D: → „Federkonstante"

$F = -D r$ $\qquad F_g(r) = -G \frac{m \cdot M}{R^3} \cdot r$

$\Rightarrow \boxed{D = G \cdot \frac{mM}{R^3}}$

$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

$\Rightarrow D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R^3}}$

$\Rightarrow \omega = 1{,}24 \cdot 10^{-3}\ s^{-1} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 84\ min$

·) $v_{max} = R \cdot \omega = \boxed{7{,}9\ km/s}$