

PN1

Besprechung der 7. Vorlesung

13.12.2021

Prof. Dr. Jan Lipfert und Prof. Dr. Ralf Jungmann

WS 2021/2022

Einstiegsfrage

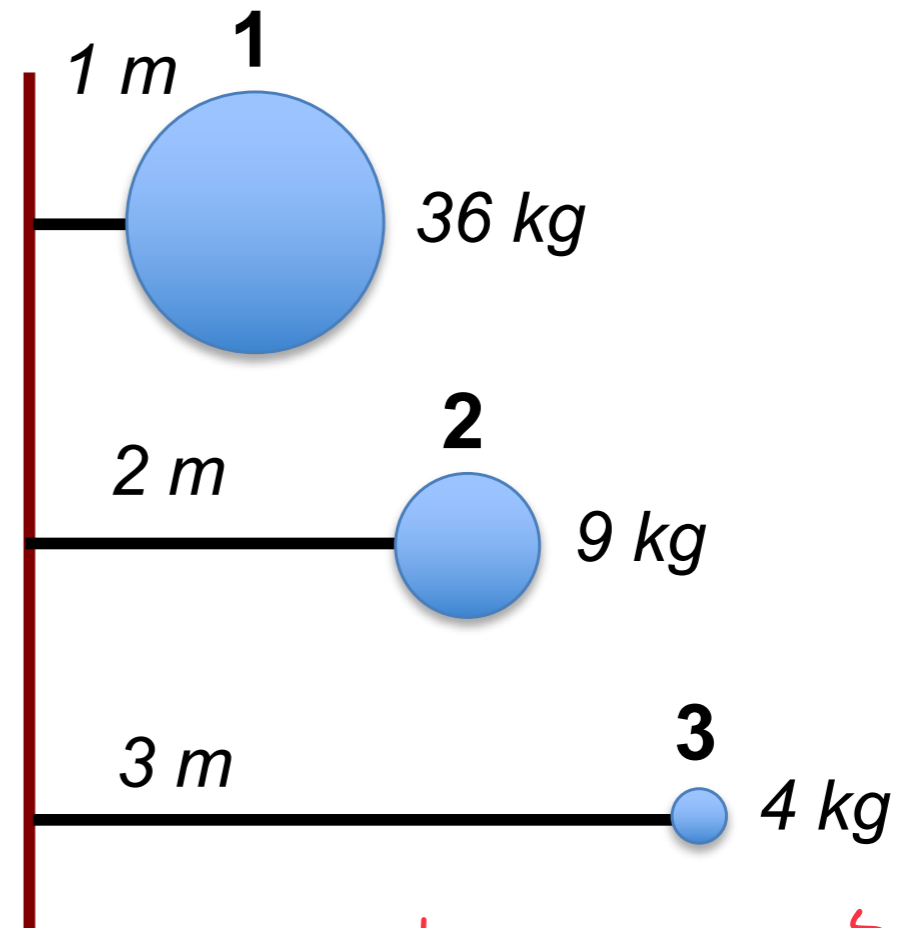
Die Skizze zeigt drei Kugeln (1, 2, 3), die sich um eine senkrechte Achse drehen. Ordnen Sie die Kugeln nach ihrem Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse, beginnend mit dem größten Wert

(A) $1 > 2 > 3$

(B) $3 > 2 > 1$

(C) $2 > 1 > 3$

(D) $1 = 2 = 3$



$$I_1 = m_1 r_1^2 = 36 \text{ kg} (1 \text{ m})^2 = 36 \text{ kg m}^2$$
$$I_2 = m_2 r_2^2 = 9 \text{ kg} (2 \text{ m})^2 = 36 \text{ kg m}^2$$
$$I_3 = m_3 r_3^2 = 4 \text{ kg} \cdot (3 \text{ m})^2 = 36 \text{ kg m}^2$$

Drehachse

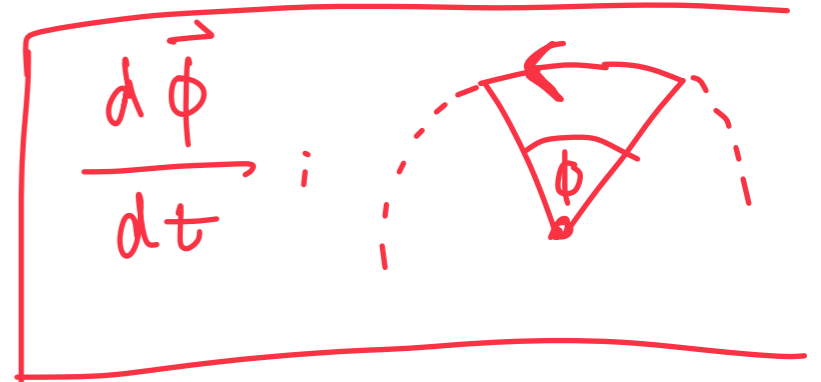
↳ Punkt förmig

Wiederholungen

Bewegungen: Translation + Rotation \Rightarrow "alles" kann beschrieben werden

$$d\vec{v} = d\vec{\phi} \times \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{v}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2} \times \vec{r} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

\hookrightarrow Winkel beschl.

\Rightarrow Bewegungsgleichung: $\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

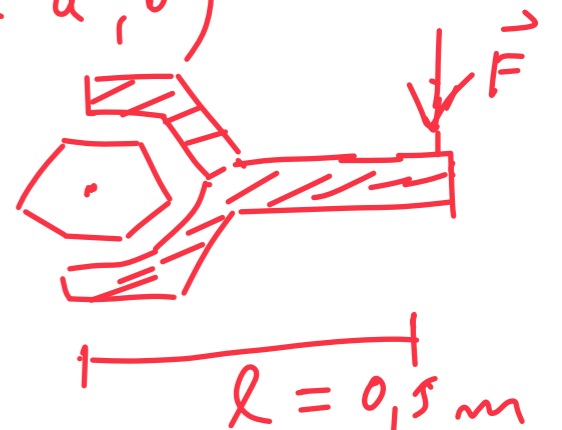
$$r(t) = r_0 + v \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

$\vec{a} \times \vec{b}$: Kreuzprodukt : $|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$

Drehmoment:

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\Rightarrow T = r \cdot F = 0,5 \cdot 1000 \text{ N} = 500 \text{ Nm}$



Berechnung von I:

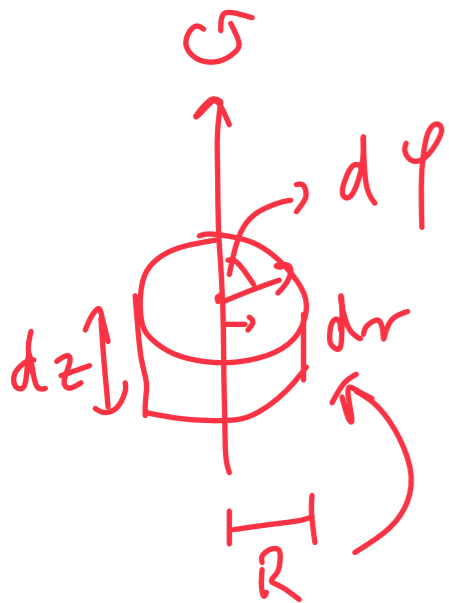
$$E_{kin,rot} = \frac{1}{2} \sum_i dm_i v_i^2$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \sum dm_i r_i^2$$

1. Schritt: $I = \int r^2 \rho \cdot dV$

$\underbrace{\rho \cdot dV}_{\hat{=} dm}$

„Zylindrische Koordinaten“



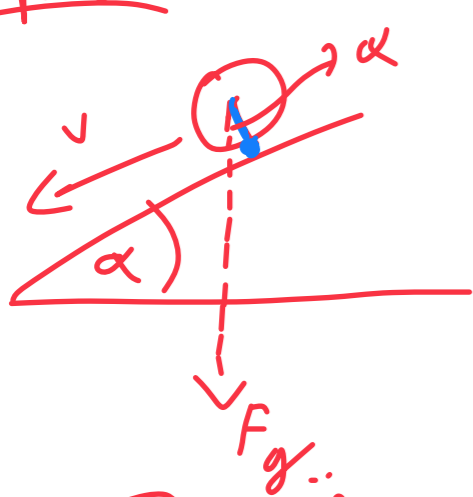
$$\Rightarrow I = \int_0^R \int_0^h \int_0^{2\pi} \rho \cdot r^2 d\phi dz \cdot r \cdot dr$$

$$= \rho \cdot 2\pi \cdot h \cdot \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

$\rho \cdot V$

mit $V = \pi R^2 \cdot h$

Beispiel: Rollende Zylinder



$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$T = R \cdot M \cdot g \cdot \sin \alpha$$

Trägheitsmoment:

$$I = I_S + MR^2$$

$$\hookrightarrow I_S = \frac{1}{2} MR^2$$

$$T = I \cdot \ddot{\varphi} \quad (\Rightarrow) \quad R \cdot M \cdot g \cdot \sin \alpha = (I_S + MR^2) \cdot \ddot{\varphi}$$

$$S = R \cdot \varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{s} = R \cdot \ddot{\varphi} \quad \rightarrow \quad a = \frac{d^2 s}{dt^2} = R \cdot \frac{Mg \cdot R \cdot \sin \alpha}{I_S + MR^2} = \frac{g \cdot \sin \alpha}{1 + I_S / MR^2}$$

Neutronenstern:

$$1) r_{\text{Sun}} = 10^9 \text{ m} ; T = 90 \text{ Tage}$$

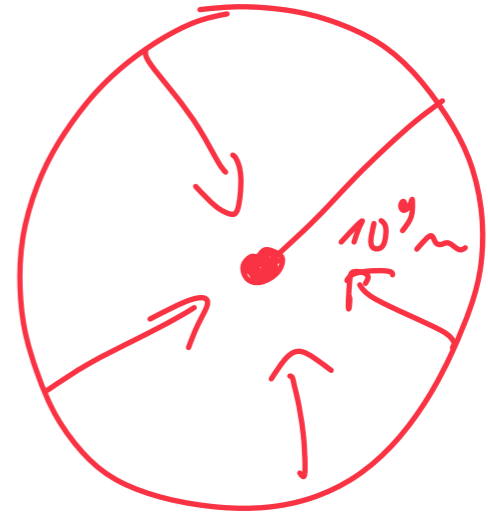
$$2) r_N ? ; 500 / \text{min} : \text{Rotationsfrequenz}$$

$$I_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} m r^2 ; L = I \cdot \omega$$

$$L_S = L_N \quad (\Rightarrow) \quad \frac{2}{5} m r_S^2 \cdot \frac{2\pi}{T_S} = \frac{2}{5} m r_N^2 \cdot \frac{2\pi}{T_N}$$

$$\Rightarrow r_N = r_S \cdot \sqrt{\frac{T_N}{T_S}}$$

$$\Rightarrow r_N = 10^9 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{1/500 \text{ s}}{90 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}}} = 16 \text{ km}$$



Wiederholung: Drehbewegungen

Die Bewegung eines **starrten Körpers** lässt sich aus **Translation** und **Rotation** zusammensetzen

Bewegungsgleichungen für Drehbewegung: Winkel, Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung

$$d\vec{\phi} \quad ; \quad \vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} \quad ; \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2}$$

Trägheitsmoment

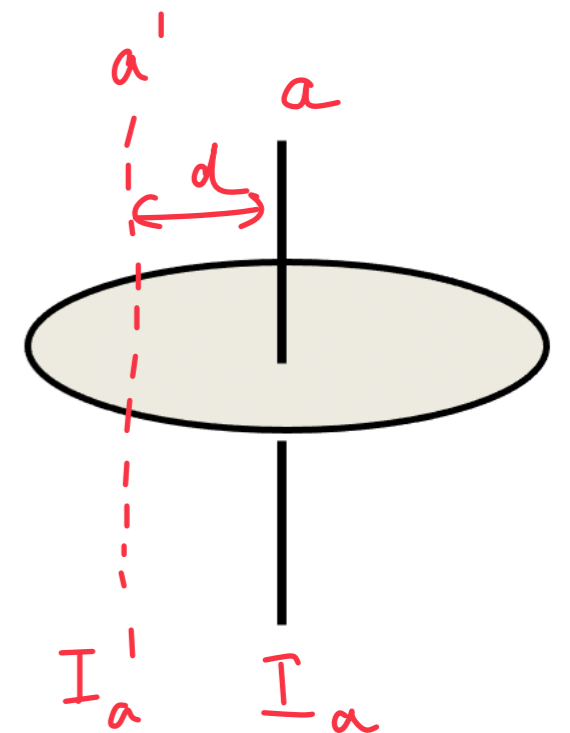
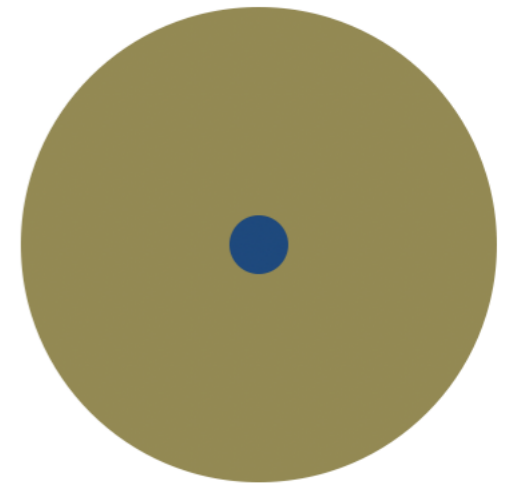
$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm = \int \rho \cdot r^2 dV$$

Steinerscher Satz

$$I_{a'} = I_a + M d^2$$

Rotationsenergie

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$



Wiederholung: Linear- vs. Drehbewegungen



**Lineare
Bewegung**

<http://sportsnscience.utah.edu/2012/09/04/skiing-friction-basic/>



Drehung

<http://de.wulffplag.wikia.com/wiki/Datei:Kettenkarussell.jpg>

Analogie: nicht gleiche Einheiten \circ \circ \circ

$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$	Weg, Verschiebung	Drehwinkel	$\vec{\phi}$
$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	Geschwindigkeit	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}}$
	Beschleunigung	Winkelbeschleunigung	$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\phi}}$
	Masse m	Trägheitsmoment	I
$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Impuls	Drehimpuls	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I \vec{\omega}$
$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	Kraft	Drehmoment	$\vec{T} = \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F}$
$\frac{1}{2} m v^2$	Kinetische Energie	Rotationsenergie	$\frac{1}{2} I \omega^2$