PN1
Besprechung der 6. Vorlesung

6.12.2021

Prof. Dr. Jan Lipfert und Prof. Dr. Ralf Jungmann

WS 2021/2022

Einstiegsfrage

Die Skizze zeigt einen Ball (m = 1 kg), der vom Boden abprallt. Was ist die Impulsänderung in (x ; y)?

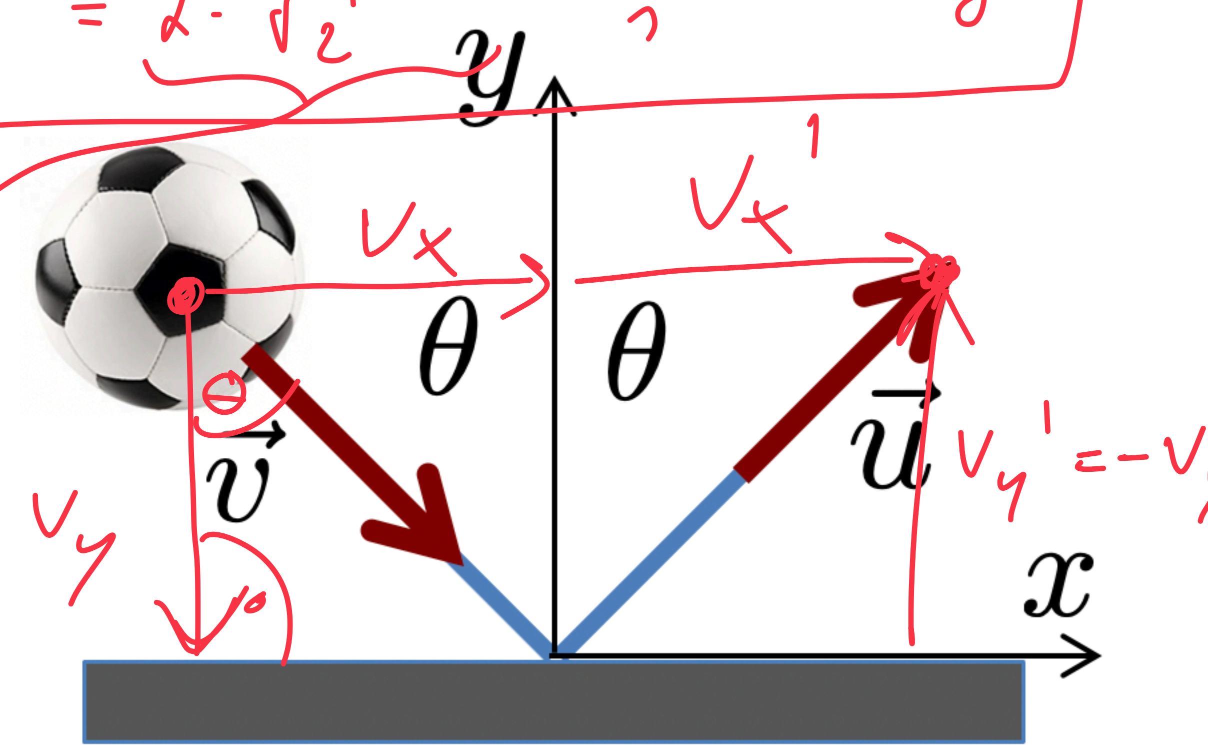
$$\theta = 45^\circ \qquad |\vec{v}| = |\vec{u}| = 10 \text{ m/s}$$

$$\boxed{v' \neq \frac{dv}{dx}}$$

$v_x = v_y = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin 45^\circ,\ \cos 45^\circ} \cdot 10 \frac{m}{s}$; $v_x = v_x' \Rightarrow \Delta p_x = 0$

$v_y = -v_y'$

$$\boxed{\Delta p_y = 2 \cdot p_y = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10 \frac{m}{s} \cdot 1 \text{ kg}}$$



(A) (0 ; 10) kg·m/s

~~(B)~~ (7,1 ; 0) kg·m/s

(C) (0 ; 7,1) kg·m/s

(D) (0 ; 14,1) kg·m/s

Wiederholung: Impuls und Stöße

Definition des Impuls

$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ $\qquad [p] = kg \frac{m}{s} = N \cdot s$

2. Newton'sches Axiom in Impulsform

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = m \cdot \dot{\vec{v}} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

$m =$ const.

Impulserhaltung

Der Gesamtimpuls $\vec{p} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{p}_i$

eines abgeschlossenen Systems aus Massepunkten ist zeitlich konstant

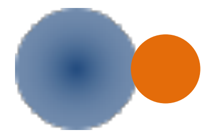
$\hookrightarrow \sum F_{Ex} = 0$

Wiederholung: Impuls und Stöße

• Stöße:

1. Grenzfall: **Perfekt (vollständig) inelastischer Stoß**

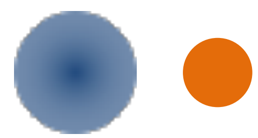
v_1, m_1 $\quad$ v_2, m_2



$\boxed{\text{Impulserhaltung}}$

$v_2 = 0$

2. Grenzfall: **Perfekt (vollständig) elastischer Stoß**



$\boxed{\text{Impuls + Energieerhaltung}}$

①

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u \quad ; \; v_2 = 0$$

$$\Rightarrow u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

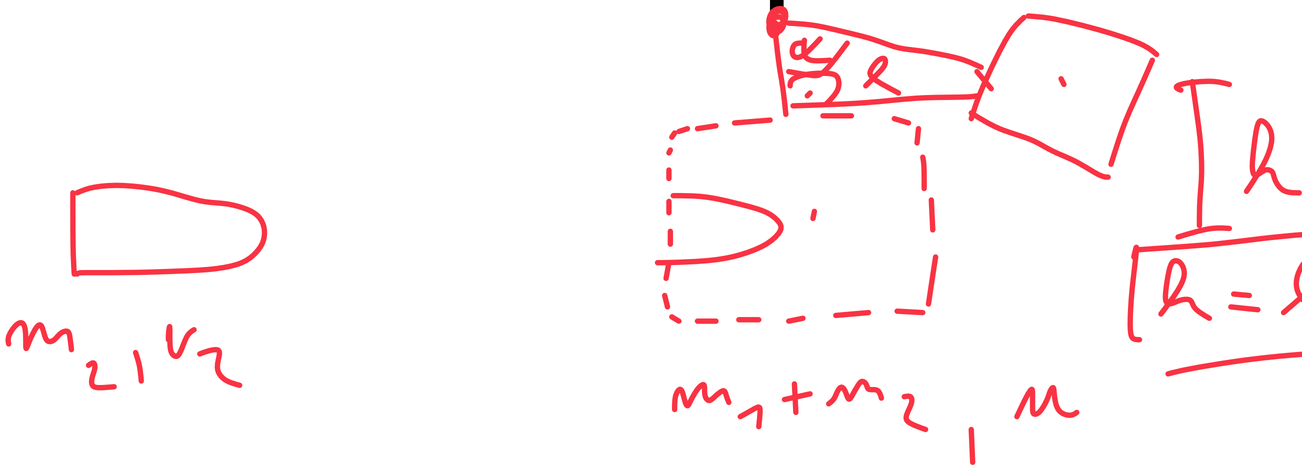
$$E_{kin}^{nach} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot u^2 = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 \cdot \underbrace{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}_{< 1}} < \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}_{E_{kin}^{vor}}$$

②

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$u_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

Beispiel: Ballistisches Pendel



$\boxed{h = l \cdot (1 - \cos\alpha)}$

$m_1 = 5\,kg$

$m_2 = 0{,}01\,kg$

$h = 20\,cm = 0{,}2\,m$

EE: $\frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot u^2 = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot l\,(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad \boxed{-\Delta E_{kin}}$

a) Berechne u: E_{kin} nach Aufprall $\Rightarrow$ Umwandlung in E_{pot}

$E_{kin} = E_{pot} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,u^2 = \underset{(m_1 + m_2)}{\underset{\downarrow}{m}} \cdot g\,h \Leftrightarrow u = \sqrt{2 \cdot g\,h} = 2\,\frac{m}{s}$

b) Berechne v_2:

IE: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\,u$

$\Leftrightarrow v_2 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot u - m_1 v_1}{m_2} \Rightarrow \boxed{v_2 = 1002\,\frac{m}{s}}$

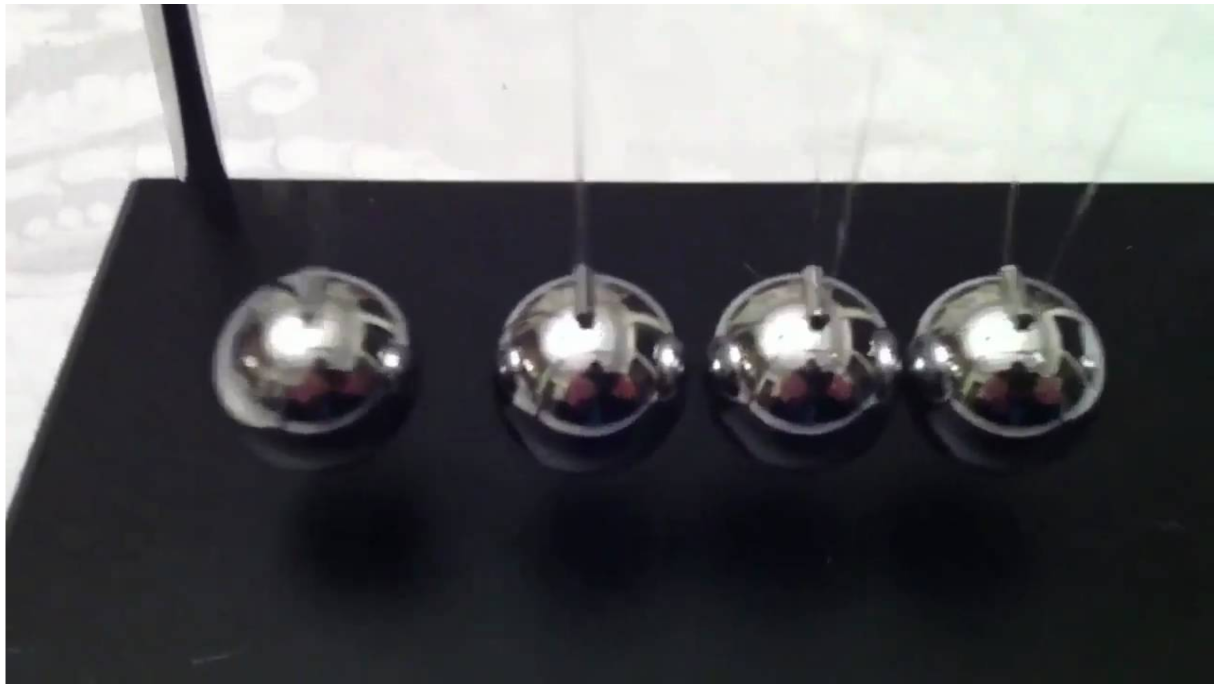
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2 + \Delta E_{diss}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_{diss} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}_{0} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}_{5020\,J} - \underbrace{\frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2}_{10\,J} = 5010\,J$$

$$= 0 + 5020\,J - 10\,J$$

$\Rightarrow$ **gesamte kin. Energie geht in Wärme / Verformung**

Newton'sche Wiege



https://www.youtube.com/watch?v=0LnbyjOyEQ8

Kann es auch sein, dass eine Kugel ausgelenkt wird, jedoch zwei mit halber kinetischer Energie wegfliegen?

v':

$$\frac{1}{2} m v'^2 = \frac{\frac{1}{2} m v^2}{2} \Rightarrow v' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v$$

$$p_{ges,vor} = \boxed{m \cdot v}$$

$$p_{ges,nach} = 2 \cdot m \frac{v}{\sqrt{2}} = \boxed{m \cdot v \cdot \sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ E_{kin} vorher und nachher sind zwar gleich, aber der Gesamtimpuls ist verschieden! $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Widerspruch}}$


EURO NCAP

Autounfall - Kräfte

Zwei Autos treffen frontal mit 50 km/h aufeinander.
Welche Aussage ist äquivalent in Bezug auf Kräfte?

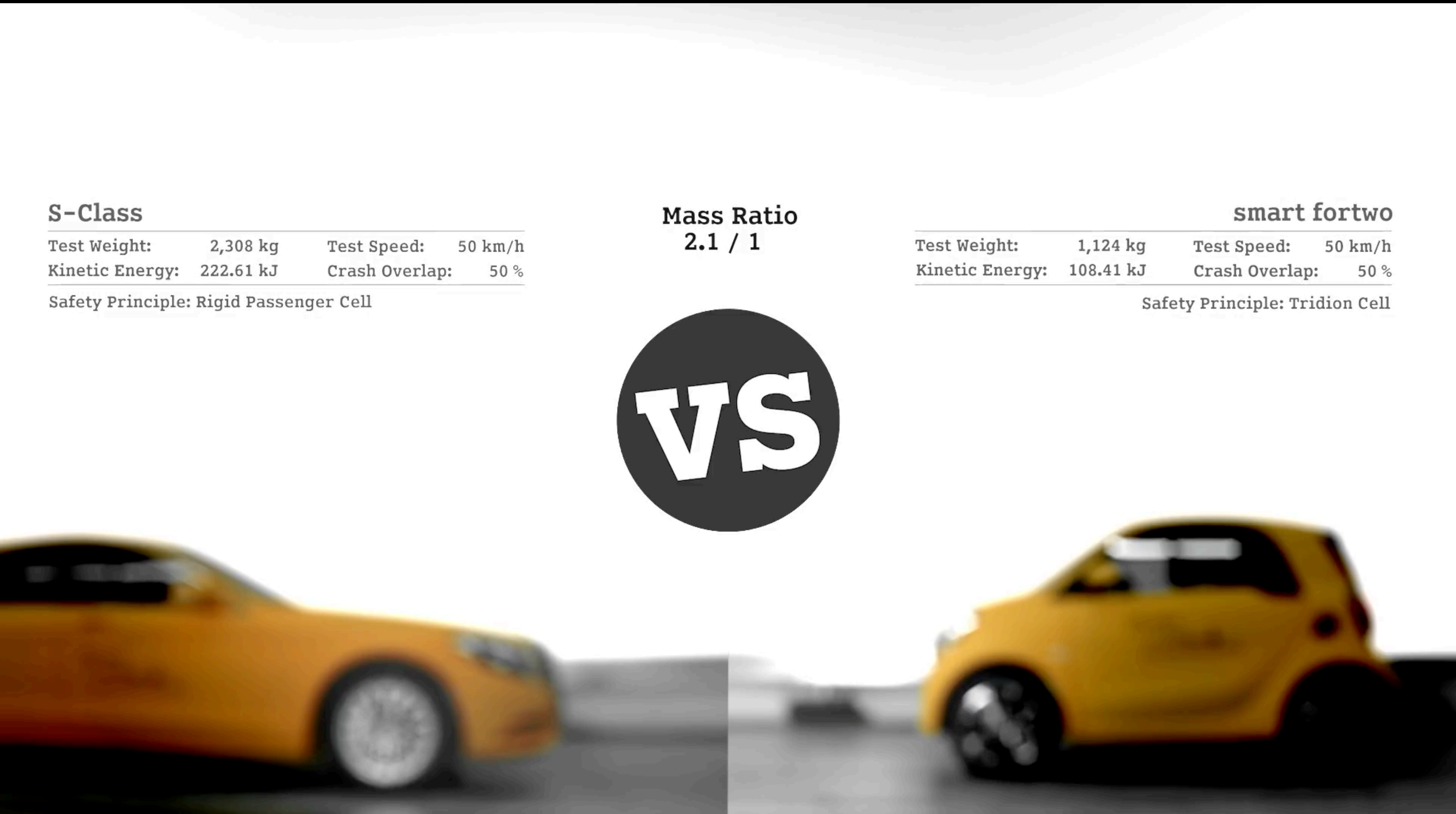
(A) Auto gegen Wand mit 100 km/h

(B) Auto gegen Wand mit 200 km/h

(C) Auto gegen Wand mit 50 km/h

(D) Auto gegen Wand mit 75 km/h

Autozusammenstoß



Autozusammenstoß

Auffahrunfall:

a) u nach Kollision:

$$p = p' \iff m_1 \cdot v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$$

$$\iff u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

→ Einsetzen: $u = \dfrac{m \cdot 2v + 2m \cdot v}{m + 2m} = \dfrac{4}{3} \cdot v$

b) ΔE_{diss} vs. E_{kin}:

$$E = E' \iff E_{kin} = E_{kin}' + \Delta E_{diss} \iff \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) u^2 + \Delta E_{diss}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E_{diss} = \frac{1}{3} m v^2} \qquad \frac{\Delta E_{diss}}{E_{kin}} = \frac{1}{9}$$

c) Frontalzusammenstoß: $v_2 = -v$

$\rightarrow$ a) $\mu = \frac{m \cdot 2v - 2mv}{m + 2m} = \frac{0}{3m} = 0$

$\rightarrow$ b) $\Delta E_{kin} = 3mv^2 \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta E_{kin}}{E_{k}} = 1}$

d) Vgl.: $|\vec{F}_{1\to 2}|$ vs. $|\vec{F}_{2\to 1}|$?

Anmerkung: $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = F$

$F = m \cdot a \Leftrightarrow a = \frac{F}{m}$

Smart: $a_1 = \frac{F}{m_1} = \frac{F}{m}$

S-Klasse: $a_2 = \frac{F}{2m_1} = \frac{1}{2} \frac{F}{m} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a_1$

Rocket Science:

IE: nicht konstante Masse:

$$\hookrightarrow -w \cdot dm = m \cdot dv$$; was passiert im Intervall dt

$$\Rightarrow -w \cdot \frac{dm}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dm}{m} = -\frac{1}{w} \cdot dv$$ $\Rightarrow$ **Integration:**

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) = -\frac{1}{w} \cdot \left(v(t) - v_0\right)$$

$\hookrightarrow v_0 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = w \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)}$$