PN1
Besprechung der 5. Vorlesung

29.11.2021

Prof. Dr. Jan Lipfert und Prof. Dr. Ralf Jungmann

WS 2021/2022

Einstiegsfrage “Hammer and feather drop”

https://youtube.com/watch?v=ZVfhztmK9zI

Einstiegsfrage “Hammer and feather drop”

Fuer den Fall (vom Loslassen bis zum Aufschlag)
von Hammer und Feder gilt:

(A) Die Aenderung der **kinetischen** Energie ist bei beiden gleich

(B) Die Aenderung der **potentiellen** Energie ist bei beiden gleich

(C) Die **Summe der Aenderungen** der kinetischen und potentiellen Energie ist fuer beide gleich

(D) A, B und C sind korrekt

Wiederholung: Kinetische Energie

$a = \text{const.} \Rightarrow v = \underbrace{v_0}_{=0} + a \cdot t \Rightarrow x = \underbrace{x_0 + v_0 t}_{=0} + \frac{1}{2} a t^2$

Hier $\Delta r = \frac{1}{2} a t^2$ mit $v = at \Rightarrow \Delta r = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a}$

$\Leftrightarrow v^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta r \Leftrightarrow v = \sqrt{2 \cdot a \cdot \Delta r}$

mit Newton: $F = m \cdot a \Leftrightarrow a = \frac{F}{m} \Rightarrow v = \sqrt{2 \frac{F}{m} \cdot \Delta r}$

$W = F \cdot \Delta r \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot W} \Leftrightarrow \boxed{W = \frac{1}{2} m v^2 = E_{kin}}$

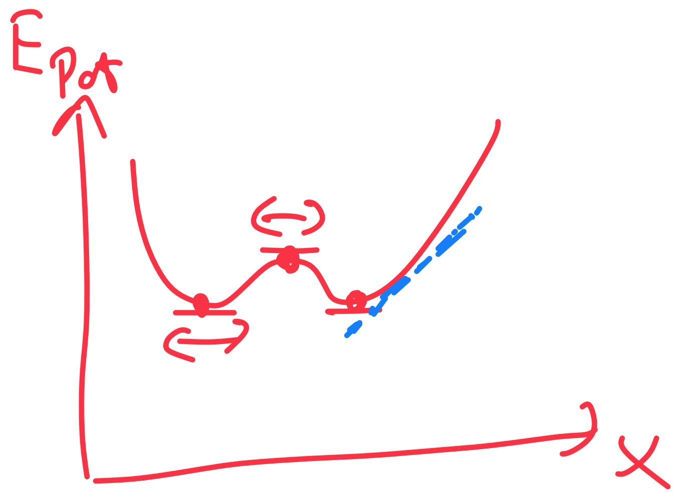
$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$

$\Delta E_{pot} = m \cdot g \cdot \Delta h$ $\qquad m_H \neq m_F$

$\Rightarrow$ Energieerhaltung der Mechanik $\boxed{\Delta E_{mech} = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot}}$

Potentielle Energie-“Landschaft”

Graphische Darstellung der potentiellen Energie



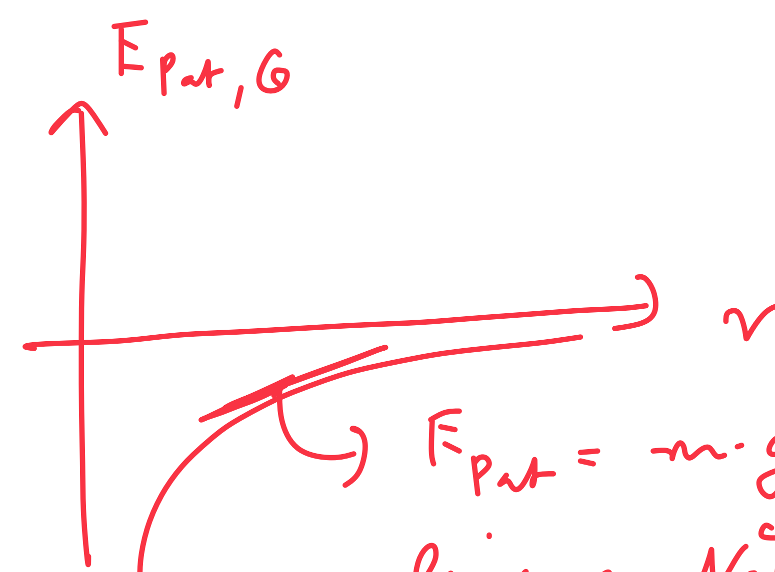
$$F = -\frac{dE_{pot}}{dx}$$

Protein Faltung

3D Landschaft

$$E_{pot,G} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r} \quad , \quad E(r \to \infty) = 0$$

$$F_G = -\frac{dE_{pot,G}}{dr} = -G\frac{mM}{r^2}$$



$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$

lineare Näherung

- Steigung = -Kraft
- Minima = stabile Gleichgewichtslagen
- Maxima = labile Gleichgewichtslagen

Satellit im Gravitationsfeld

Newton: $\vec{F}_G = -G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -G \cdot \frac{m\,M}{r^2} \cdot \hat{r}$

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

$\Rightarrow$ Bedingung für Umlaufbahn: $F_G = F_{zp}$

Kräfte gleich gewählt

$G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m\,\omega^2 r$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r}$

$\Rightarrow \boxed{v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} = \omega r}$

Geostationaere Satelliten

Geostationaere Satelliten

Ein Satellit der Masse m = 500 kg soll in eine geostationäre Umlaufbahn gebracht werden. Man spricht von einer geostationären Umlaufbahn eines Satelliten, wenn er die gleiche Winkelgeschwindigkeit wie die Erde hat und somit scheinbar fest über einem Punkt der Erdoberfläche steht.

Welche sind geostationaere Satelliten?

a) ISS
b) Kommunikationssatelliten
c) GPS-Satelliten
d) Wettersatelliten

Wie viele davon gibt es?

a) 10
b) 50
c) 100
d) 200
e) 400
f) 600
g) 1000
h) >1000

Masse Satellit = 500 kg
Erdradius = 6400 km
Erdmasse = 5,97e24 kg

Berechnung der Hoehe der geostationaeren Umlaufbahn

$\Rightarrow$ ω ist gleich der Erde

$$\omega = \frac{2\pi}{T_E} \quad \hookrightarrow 24h \qquad \Rightarrow \boxed{F_{ZP} = F_G}$$

$$\Rightarrow m_S \cdot \omega^2 (r_E + h_S) = G \cdot \frac{m_E \cdot m_S}{(r_E + h_S)^2} \qquad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T_E}$$

$$\Rightarrow m_S \cdot \frac{4\pi^2}{T_E^2} (r_E + h_S) = G \frac{m_E \cdot m_S}{(r_E + h_S)^2} \quad \Big\| \cdot (r_E + h_S)^2$$

$$\Leftrightarrow m_S \frac{4\pi^2}{T_E^2} (r_E + h_S)^3 = G \cdot m_E \cdot m_S \quad \Big\| : m_S \; ; \cdot \frac{T_E^2}{4\pi^2}$$

$$\Leftrightarrow (r_E + h_S)^3 = G \cdot m_E \cdot \frac{T_E^2}{4\pi^2} \quad \Big\| \sqrt[3]{\ldots} \; ; - r_E$$

$$\Leftrightarrow \boxed{h_S = \sqrt[3]{G m_E \frac{T_E^2}{4\pi^2}} - r_E} \Rightarrow \boxed{35\,800 \text{ km}}$$

Masse Satellit = 500 kg
Erdradius = 6400 km
Erdmasse = 5,97e24 kg

Berechnung der potentiellen und kinetischen Energie
des Satelliten in dieser Hoehe

$$\cdot)\ E_{pot}(r) = -G\,\frac{m_S \cdot m_E}{r} \quad ; \; r > r_E$$

$$\hookrightarrow r_E + h_S = 42200\ km$$

$$E_{pot}(r_E + h_S) = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot \frac{500\,kg \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\,kg}{} \cdot \frac{1}{42200 \cdot 10^3\,m} = \boxed{-4{,}72 \cdot 10^9\,J}$$

Bahngeschwindigkeit:

$$v = \frac{u}{T_E} = \frac{2\pi(r_E + h_S)}{T_E} = \frac{2\pi \cdot 4{,}22 \cdot 10^7\,m}{86400\,s} \approx 3\,km/s$$

$$\Rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 500\,kg \cdot \left(3 \cdot 10^3\,\frac{m}{s}\right)^2 \approx \boxed{2{,}36 \cdot 10^9\,J}$$

Masse Satellit = 500 kg
Erdradius = 6400 km
Erdmasse = 5,97e24 kg

Berechnung der Gesamtenergie des Satelliten
und der Energie die noetig ist, um ihn auf die Umlaufbahn zu bringen

$$E_{ges} = E_{pot} + E_{kin} = -2{,}36 \cdot 10^{9}\,J$$

$$\Delta E = E_{ges} - E_{pot}(r_E) \quad \text{mit} \quad E_{pot} = -G\,\frac{m_S \cdot m_E}{r_E}$$

$$\Rightarrow \Delta E = -2{,}36 \cdot 10^{9}\,J - \left(-6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \cdot 500\,kg \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\,kg}{6{,}4 \cdot 10^{6}\,m}\right)$$

$$= 2{,}87 \cdot 10^{10}\,J$$

m_S relevant für Höhe und Geschwindigkeit.

Masse Satellit = 500 kg
Erdradius = 6400 km
Erdmasse = 5,97e24 kg

Autobahn revisited

$$|F_W| = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot C_W \cdot v^2$$

- Dichte des strömenden Fluids ρ
- Referenzfläche A
- Strömungsgeschwindigkeit v und
- Strömungswiderstandskoeffizienten C_w.

Wie viel mehr **Motorleistung** ist nötig,
um mit 150 km/h statt 112 km/h zu fahren?

Newton'sche Reibung: $F \sim v^2$

$W = F \cdot dx \sim v^2$

$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot \frac{dx}{dt} = F \cdot v \sim \boxed{v^3}$

$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{150}{112}\right)^3 \approx 2{,}4}$

https://de.wikipedia.org/wiki/Autobahn

http://www.freefoto.com/preview/1216-07-33/Speed-Limit-70-Sign--Route-95--Nevada--USA

Autobahn revisited

Glauben Sie unseren Ausfuehrungen zum Luftwiderstand von letzter Vorlesung?
Machen wir doch mal ein Experiment…

(Das Auto misst Drehmoment und berechnet daraus Leistung)

LUFTREIBUNG UND LEISTUNG

EXPERIMENT

$$\left(\frac{72}{19}\right)^3 \approx \boxed{3{,}81}$$

$$\left(\frac{160}{100}\right)^3 \approx \boxed{4}$$