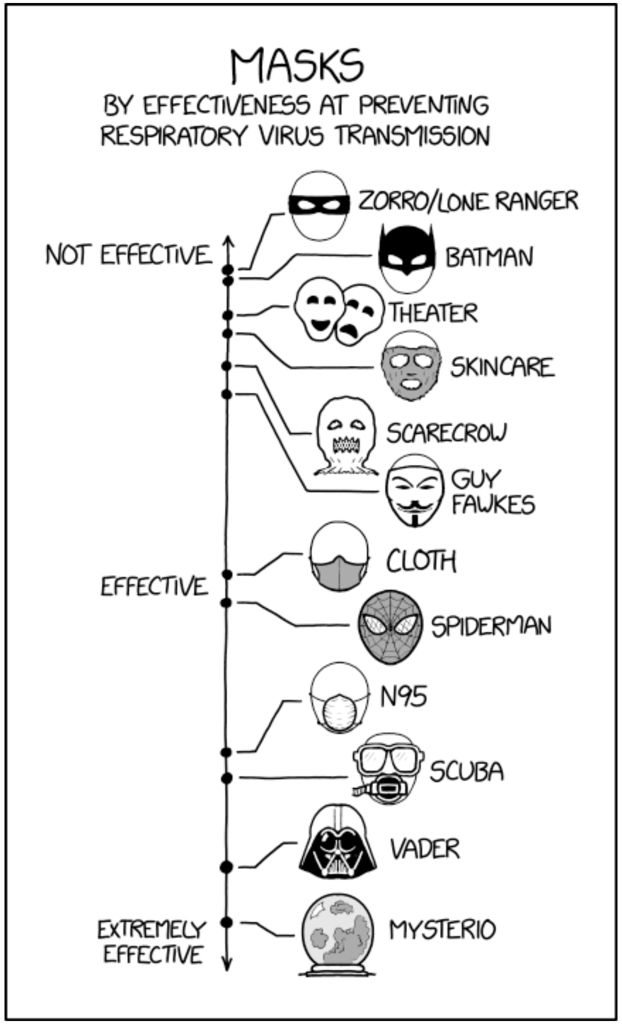
Wer misst misst Mist!

Physik 1 für Chemiker und Biologen

Besprechung der 2. Vorlesung



https://xkcd.com/2367/

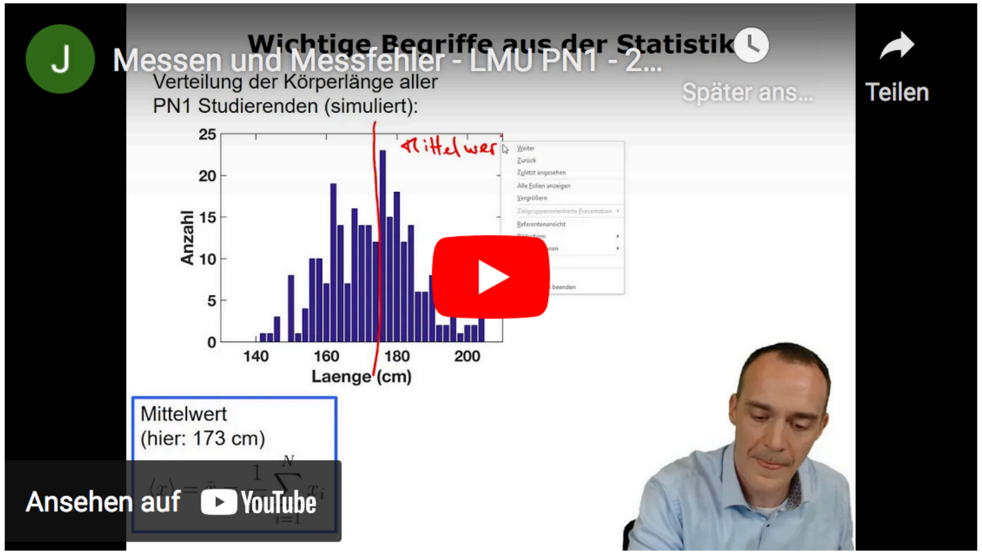
Themen:
- Messen und Messfehler
- Fehlerfortpflanzung
- Einheiten: Zeit, Länge, Masse
- Umrechnung von Einheiten

Prof. Dr. Ralf Jungmann
Jungmann@physik.lmu.de
Prof. Dr. Jan Lipfert
Jan.Lipfert@lmu.de

Vorlesung online!?

2. Vorlesung (Besprechung Montag 08.11.2021)

Messen und Messfehler; Fehlerfortpflanzung; Einheiten; Umrechnung von Einheiten



Webseite der Vorlesungen:
https://www2.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/wise_21_22/pn1/index.html

← Videos
→ youtube
→ LMU cast
} gleich

- **2. Vorlesung** [youtube][LMU cast Kanal]
- Vorläufige Folien [PDF]
- Komplette Folien [PDF]

} PDFs

- Verständnisfrage: Sie haben in einer Stichprobe 4, 5, 3, 7 und 1 gemessen. Was sind der Mittelwert, die Standardabweichung und der Stichprobenfehler? (Lösung [PDF])
- Verständnisfrage Messfehler [PDF] (Lösung [PDF])
- Verständnisfrage Gaußsche Fehlerfortpflanzung [PDF] (Lösung [PDF])

} Verständnisfragen

- Aufzeichnung der **Besprechung der 2. Vorlesung** im LMU cast Kanal unter "PN1 - 2. Besprechung" (nur mit LMU Kennung): [Link]
- Komplette Folien zur Besprechung der 2. Vorlesung [PDF]

Zur Wiederholung & Ergänzung:

- *Halliday Physik* Kapitel 1
- *Tipler Physik* Kapitel 1

} Literatur

Poll: Vorlesung angeschaut?

Zusammenfassung: Einheiten

- Das International Einheitensystem (SI) kennt sieben Grundgrößen: **Meter, Kilogramm, Sekunde**, Ampere, Kelvin, Mol, Candela

https://en.wikipedia.org/wiki/File:US_National_Length_Meter.JPG

Kopie des Urmeters (Platin-Iridium Legierung)

Kontrolle der Einheiten ist eine sehr nützliche Strategie zur Überprüfung von Ergebnissen und Lösungswegen!

$$\Delta x = 2 \cdot 13{,}0\,\text{m} = 26{,}0\,\text{m}$$

$$\Delta t = 86{,}6\,\text{ns} = 86{,}6 \cdot 10^{-9}\,\text{s}$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{26{,}0\,\text{m}}{86{,}6 \cdot 10^{-9}\,\text{s}} = 3{,}0 \cdot 10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

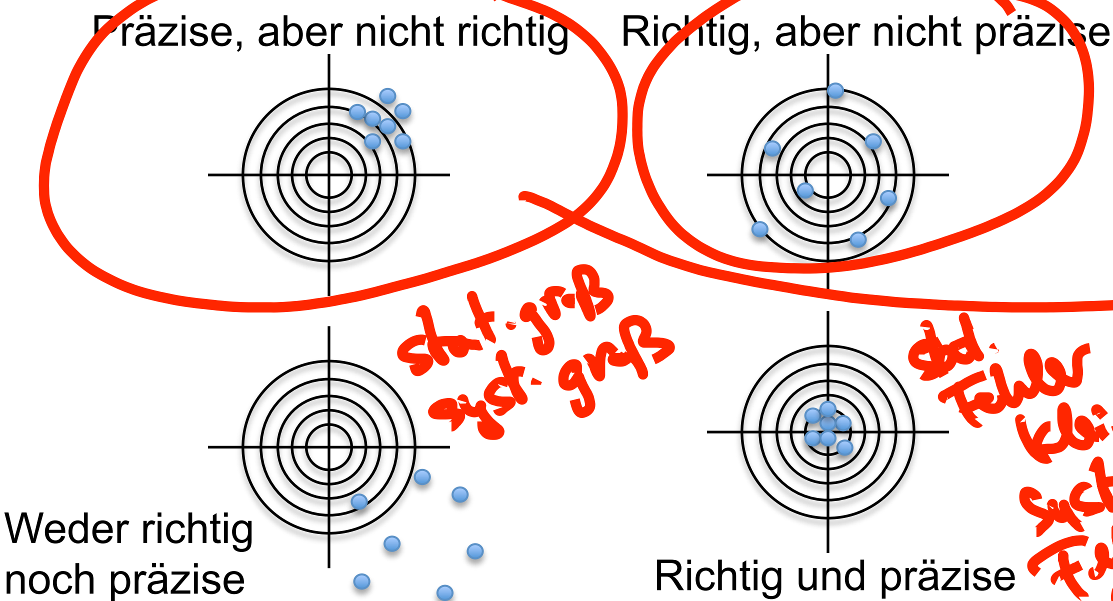
$$1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1\,\text{km}}{1000\,\text{m}} \cdot \frac{60\,\text{s}}{1\,\text{min}} \cdot \frac{60\,\text{min}}{1\,\text{h}} = 3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Zusammenfassung: Arten von Messfehler

Systematische Fehler (= systematische Abweichungen) sind einseitig gerichtet und durch im Prinzip feststellbare Ursachen bedingt. Lassen sich nicht durch wiederholte Messungen eliminieren.
Statistische Fehler (= zufällige Abweichungen) streuen in Betrag und Vorzeichen. Lassen sich durch wiederholte Messungen reduzieren.

syst. Fehler klein

Richtig ≈ akkurat



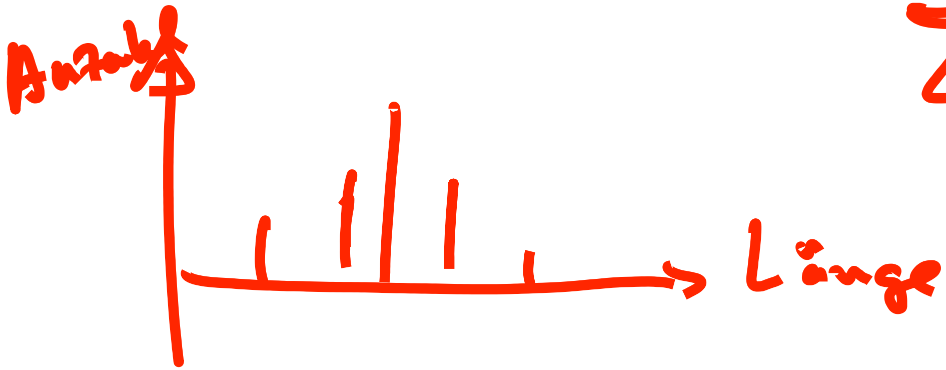
systematischer Fehler groß: stat. Fehler klein

stat. groß
syst. groß

stat. Fehler klein
syst. Feh. klein

Zusammenfassung: Begriffe aus der Statistik

Verteilung der Körperlänge aller PN1 Studierenden (Zoom poll):



Notation:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_N$$

σ^2 = Varianz

Mittelwert: $\langle x \rangle$

$$\langle x \rangle = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Standardabweichung:

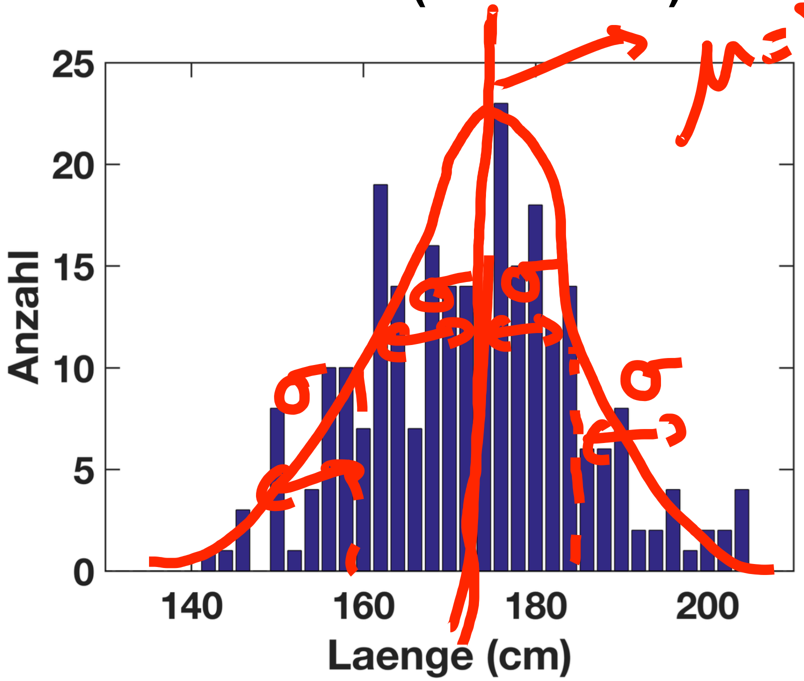
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Stichprobenfehler („standard error of the mean"):

$$\sigma_{SEM} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Gauß- (oder Normal-)Verteilung

Verteilung der Körperlänge aller PN1 Studierenden
mit Gauß-Funktion (rote Linie):



μ = Mittel-wert

https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

Carl Friedrich Gauß
(1777-1855)

Größen, die von vielen zufälligen additiven Faktoren abhängen sind normal-verteilt.

68% in $\pm 1\sigma$

95% in $\pm 2\sigma$

99% in $\pm 3\sigma$

Gaußverteilung: $$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Mittelwert: μ

Standard-abweichung: σ

Verständnisfrage Statistik

In einer Feldstudie haben Sie die Massen von 30 Murmeltieren gemessen. Der Mittelwert ist 5,0 kg, die Standardabweichung 1,2 kg und der Stichprobenfehler 0,2 kg.
In einer zweiten Messkampagne bestimmen Sie die Masse von weiteren 90 Murmeltieren. Nun berechnen Sie Mittelwert μ, die Standardabweichung σ und Stichprobenfehler *SEM* für den gesamten Datensatz. Was würden Sie erwarten?


https://de.wikipedia.org/wiki/Murmeltiere

$SEM = \sigma_{SEM} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

A) μ ~ 5 kg; σ ~ 1,2 kg; SEM ~ 0,2 kg

B) μ < 5 kg; σ < 1,2 kg; SEM ~ 0,2 kg

C) μ ~ 5 kg; σ ~ 1,2 kg; SEM < 0,2 kg

D) μ > 5 kg; σ > 1,2 kg; SEM ~ 0,2 kg

Zusammenfassung: Statistische Fehler

- Messungen haben immer einen **Messfehler**.

  $$\langle x \rangle = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

- ○ **Mittelwert**: beste Schätzung des „wahren“ Wertes

- ○ **Standardabweichung**: Fehler der Einzelmessung

  $$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

  σ^2 = Var = Varianz

- ○ **Stichprobenfehler**: Wie genau ist „wahrer“ Mittelwert nach *N* Messungen bestimmt?

  $$\sigma_{SEM} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

N-1 oder *N*?

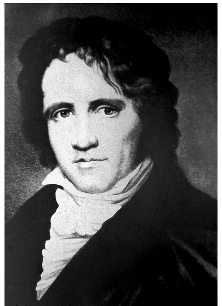
In der Literatur finden sich in der Formel für die Varianz (oder Standardabweichung) sowohl *N-1* als auch *N*:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

Korrekte Form für die Schätzung der Varianz aus einer Stichprobe („korrigierte Stichprobenvarianz“). Die Verwendung von *N-1* ist die sogenannte Bessel-Korrektur.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

Korrekte Form für die Varianz einer Verteilung (d.h. wenn ich keine Stichprobe genommen haben, sondern alle Werte einer Verteilung kenne).



https://de.wikipedia.org/wiki/Friedrich_Wilhelm_Bessel

Friedrich Wilhelm Bessel (1784 - 1846)

There is a long story about why the denominator of (14.1.2) is $N-1$ instead of N. If you have never heard that story, you may consult any good statistics text. Here we will be content to note that the $N-1$ *should* be changed to N if you are ever in the situation of measuring the variance of a distribution whose mean $\overline{x}$ is known *a priori* rather than being estimated from the data. (We might also comment that if the difference between N and $N-1$ ever matters to you, then you are probably up to no good anyway — e.g., trying to substantiate a questionable hypothesis with marginal data.)

Press, Teukolsky, Vetterling & Flannery, „Numerical Recipes“

Zusammenfassung: Fehlerfortpflanzung

- **Gaußsche Fehlerfortpflanzung**: Für den Fall, dass eine Größe ***y*** von den Messgrößen ***x$_j$*** abhängt und die Größen ***x$_j$*** unkorreliert sind

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \sigma_{x_j} \right)^2}$$

Summe über Input-größen

partielle Ableitung von f nach x_j

Fehler in x_j

Vorsicht!
- Gilt nur näherungsweise
- Gilt nur für voneinander unabhängige Variable

$y = f(x_1, x_2)$

$x_1, x_2 \rightarrow$ verschiedene Messgrößen

$\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}$, etc.

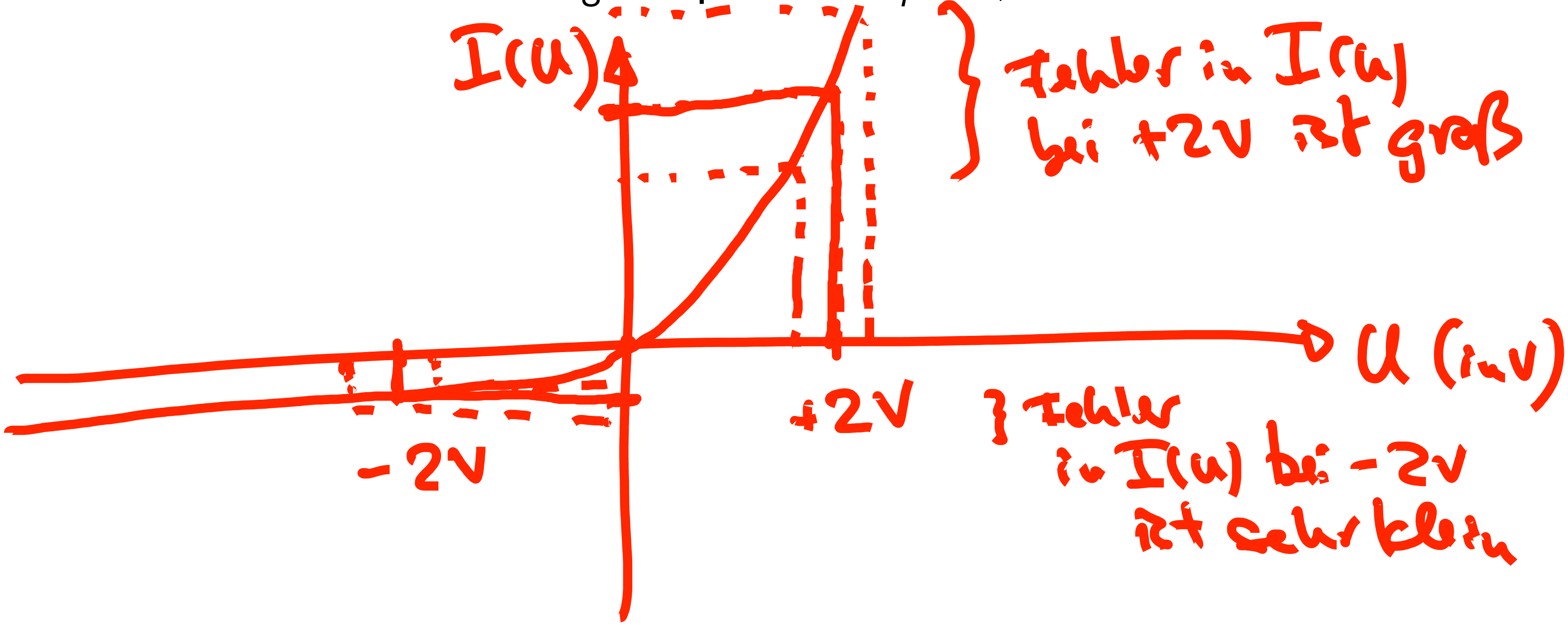
$\hookrightarrow$ Meßfehler der x_1 etc.

Beispiel: Fehlerfortpflanzung

Dioden sind elektronische Bauelemente, die in Abhängigkeit von der angelegten Spannung *U* (in Volt, V) einen gewissen Strom *I* (in Ampere, A) durchlassen. Shockley-Gleichung für *I(U)*

$$I(U) = I_S \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right) \text{ „} = f(x)\text{"}$$

Für eine bestimmte Diode sei I_S = 3 µA und U_T = 0,5 V.



Beispiel: Fehlerfortpflanzung

$$I(U) = I_S \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right) = I_S e^{U/U_T} - I_S$$

Für eine bestimmte Diode sei I_S = 3 µA und U_T = 0,5 V.

A) Sie legen eine Spannung von U = 2,0 V ± 0,1 V an. Was ist der Fehler in I?

B) Sie legen eine Spannung von U = -2,0 V ± 0,1 V an. Was ist der Fehler in I?

$$\frac{\partial I(U)}{\partial U} = \frac{I_S}{U_T} e^{U/U_T}$$

$$\sigma_{I(U)} = \sqrt{\left(\frac{\partial I(U)}{\partial U} \cdot \sigma_U\right)^2} = \frac{I_S}{U_T} e^{U/U_T} \cdot \sigma_U$$

A) $I(U) = 160\,\mu A \pm \underline{33\,\mu A}$

B) $I(U) = -2{,}9\,\mu A \pm \underline{0{,}01\,\mu A}$

Notizen

$$y = f(x_1, x_2) = f(A, B) = \frac{A}{B}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{A}{B}\right)}{\partial A} = \frac{1}{B}$$

$$\frac{\partial f}{\partial B} = -\frac{A}{B^2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_{x_i}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial A}\cdot\sigma_A\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial B}\cdot\sigma_B\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{B}\cdot\sigma_A\right)^2 + \left(-\frac{A}{B^2}\cdot\sigma_B\right)^2}$$

Relativer Fehler:

$$\frac{\sigma_y}{y} = \frac{\sigma_y}{\left(\frac{A}{B}\right)} = \frac{\sigma_y\cdot B}{A} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2}$$

Notizen

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_{x_i}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\sigma_{x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\sigma_{x_n}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

z.B. $f(x) = x^2$

$$\frac{df}{dx} = 2x$$

$$\int\int f(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot dx_1 \cdot dx_2$$