

Übungsaufgaben zu E1 / E1p Mechanik, WS 2020/22

Thomas Udem, Karl-Heinz Mantel

Fakultät für Physik, Ludwig-Maximilians-Universität, München

Blatt 13

wird besprochen am 9./10./11.02.2022

Anmerkung: Lehramtsstudierende und Studierende mit Nebenfach (6 ECTS) brauchen Aufgaben, die mit einem (*) gekennzeichnet sind, nicht zu bearbeiten.

Aufgabe 49 Zweidimensionale Strömung (*)

Eine zweidimensionale, reibungsfreie Strömung ohne äußere Kräfte, sei durch folgendes Geschwindigkeitsfeld gegeben:

$$\vec{v}(x, y) = \frac{1}{t_0} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Das Geschwindigkeitsfeld sei räumlich begrenzt, d.h. $x^2 + y^2 < const.$

- Skizzieren Sie das Geschwindigkeitsfeld
- Zeigen Sie, dass diese Strömung die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Strömung erfüllt
- Bestimmen Sie den Druck p in dieser Strömung als Funktion des Abstands vom Ursprung.

Aufgabe 50 Fallschirmspringer

- Sie springen aus einem Flugzeug aus $h = 5000$ m ab und interessieren sich dafür mit welcher Geschwindigkeit Sie wohl auf Meereshöhe ankommen würden, falls Sie den mitgeführten Fallschirm nicht öffneten. Ihr Physiklehrer sagt "vernachlässigen Sie die Reibung" weil Sie es sonst nicht ausrechnen könnten. Wie schnell würden Sie werden?
- Nach einem Semester Mechanik sind Sie schlauer und können zumindest näherungsweise die Reibung berücksichtigen. Gehen Sie zunächst von der Stokesschen Reibung aus und nähern Sie die Gestalt Ihres Körpers durch eine Kugel mit einem Radius von $R = 1$ m und einer Masse von $m = 100$ kg an. Stellen Sie die Differentialgleichung auf und vergleichen sie mit der Vorlesung. Für die Luft können Sie eine Viskosität von $\eta = 17 \mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ annehmen. Berechnen Sie Ihre Endgeschwindigkeit auf Meereshöhe. Verwenden Sie dabei eine geeignete Näherung falls dies erforderlich sein sollte.
- Jetzt bekommen wir Zweifel ob die Stokessche Reibung wirklich das beste Modell ist. Berechnen Sie zur Kontrolle die Reynoldszahl mit $\rho_{\text{Luft}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$. Gehen Sie dabei von der oben abgeschätzten Geschwindigkeit von $\bar{v} = 100$ m/s aus.
- Wegen des Ergebnisses in c) entscheiden Sie sich jetzt für die Newtonsche Reibung. Geben Sie die Endgeschwindigkeit aus dem Kräftegleichgewicht an. Gehen Sie dabei wieder von einer Kugelgestalt aus. Wie schnell würden Sie wenn Sie versuchen eine Tropfenform mit dem selben Radius anzunehmen?
- Stellen Sie nun die Differentialgleichung für die Newtonsche Reibung auf und versuchen Sie diese zu lösen. Warum ist das so schwierig? Erst dann, wenn Sie nicht weiter kommen, schauen Sie bei Wikipedia nach und erklären und skizzieren Sie die Lösung die Sie dort finden.

Aufgabe 51 Das Universum als Fluid (*)

Das Universum ist so groß, dass die einzelnen Galaxien darin wie Atome in einem Gas angesehen werden können. Wir versuchen dieses "Gas" durch ein Fluid mit Hilfe der Euler-Gleichung zu beschreiben. Wir vernachlässigen dabei die Viskosität und die Kompressibilität, gehen aber nicht von einer stationären Strömung aus.

- a) Nehmen Sie an, die Teilchen (Galaxien) in diesem Fluid gehorchen dem folgenden Geschwindigkeitsfeld:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{r}}{t}$$

Erklären Sie warum dieses Feld aus einer Explosion bei $\vec{r} = 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ hervorgegangen sein kann (wobei für $t > 0$ keine Kräfte mehr wirken).

- b) Zeigen Sie, dass das Geschwindigkeitsfeld aus a) die Euler-Gleichung ohne Kräfte erfüllt.
- c) Nun sieht es so aus als ob wir das 'Zentrum des Universums' (bei $\vec{r} = 0$) wären, da messbar alle Galaxien von uns weg fliegen. (Eine ähnliche Annahme hat die Menschheit schon einmal 1000 Jahre gekostet!) Zeigen Sie, dass dem nicht so ist, indem Sie das Geschwindigkeitsfeld im Bezugssystem einer zum Zeitpunkt t bei \vec{r}_0 befindlichen Galaxis beschreiben.
- d) Nun wollen wir annehmen die Galaxien ziehen sich gegenseitig an, aber vernachlässigen immer noch den Druck also die direkte Wechselwirkung. Wir brauchen daher jetzt die Dichte $\rho(\vec{r}, t)$. Erläutern Sie warum es vernünftig anzunehmen ist, dass die Dichte höchstens von der Zeit, aber nicht vom Ort abhängt.
- e) Welche Gravitationsbeschleunigung $\vec{g}(\vec{r})$ erwarten Sie für ein unendlich großes Universum?
- f) Nun nehmen wir an, das Universum hätte einen Radius R um uns ($\vec{r} = 0$) und eine Dichte ρ . Welche Gravitationsbeschleunigung erhalten Sie für die Galaxis am Punkt \vec{r} mit $|\vec{r}| < R$?
- g) Zeigen Sie, dass diese Gravitationsbeschleunigung, genau wie das Geschwindigkeitsfeld isotrop ist.

Aufgabe 52 - Nachtrag zur Aufgabe 19 (*)

In der Aufgabe 19 haben Sie die Kovarianz zwischen der Covid-19 Inzidenz und die Impfquote in Deutschland für den 7.11.2021 berechnet. Inzwischen hat sich das Bild grundlegend geändert, wie Sie der Abbildung entnehmen können.

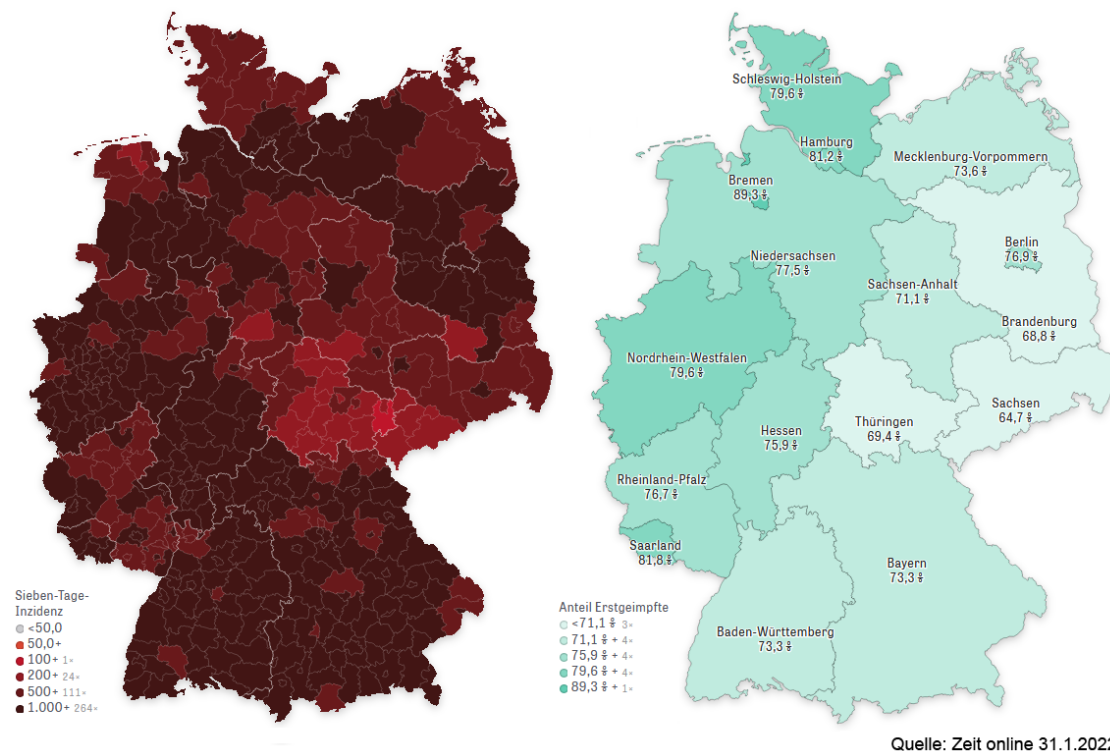


Figure 1: Links: SARS-CoV-2 Inzidenz in Deutschland. Rechts: Quote der vollständig Geimpften.

- a) Erklären Sie die Kovarianz der Werte in Abb. 1.
- b) Um die Situation quantitativ zu beschreiben, verwenden Sie nun die Daten vom 31.1.2022 aus der beigefügter Tabelle. Berechnen Sie den Pearson Korrelationskoeffizienten zwischen der Impfquote und der Inzidenz. Eine bequeme Art den Koeffizienten (und dessen Unsicherheit) zu berechnen liefert die Python Funktion `pearsonr(x,y)` des `scipy` Pakets. Diskutieren Sie mögliche Schlussfolgerungen aus der gefundenen Korrelation.

Bundesland	Impfquote [%]	Inzidenz	Bevölkerung [10 ⁵]
Baden-Württemberg	72.4	1154.4	110.7
Bayern	72.9	1384.6	130.8
Berlin	75.2	1821.0	36.6
Brandenburg	67.3	1342.6	25.1
Bremen	86.7	1575.9	6.8
Hamburg	79.4	1780.3	18.4
Hessen	72.5	1411.0	62.7
Mecklenburg-Vorpommern	72.5	1079.2	16.1
Niedersachsen	75.4	910.5	79.8
Nordrhein-Westfalen	77.0	1212.9	179.3
Rheinland-Pfalz	73.0	863.9	40.9
Saarland	80.2	1173.5	9.9
Sachsen	62.7	678.5	40.8
Sachsen-Anhalt	70.9	805.0	22.1
Schleswig-Holstein	78.4	894.9	29.0
Thüringen	68.2	468.6	21.4

Table 1: SARS-CoV-2 Inzidenzen in Neuinfektionen pro Woche und 100,000 Einwohnern und Anteil der vollständig Geimpften aufgeschlüsselt nach Bundesland. Daten vom 7.11.2021 vom Robert-Koch Institut.