Übungsaufgaben zu E1 / E1p Mechanik, WS 2021/22

Thomas Udem, Karl-Heinz Mantel

Fakultät für Physik, Ludwig-Maximilians-Universität, München

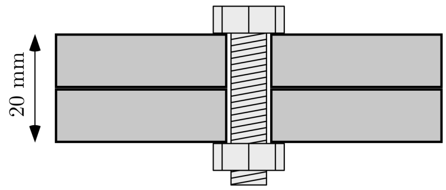
Blatt 11 wird besprochen am 26./27./28.01.2022

Anmerkung: Lehramtsstudierende und Studierende mit Nebenfach (6 ECTS) brauchen Aufgaben, die mit einem (*) gekennzeichnet sind, nicht zu bearbeiten.

Aufgabe 42 Schraube

Bevor Sie mit der Lösung der Aufgabe beginnen, stellen Sie Ihre Kaffeetasse auf einem Tisch ab. Auf die Tasse wirkt die Gravitation mit einer Kraft $F = mg$. Warum wird die Tasse nicht beschleunigt?

Eine Stahlschraube M6 (Elastizitätsmodul 200×10^9 N/m^2, Schubmodul für Stahl $G = 80\,\mathrm{kN/mm^2}$) mit 1 mm Abstand zwischen den Gewindetälern und einem Nenndurchmesser von 6 mm wird mit einem Drehmomentenschlüssel wie in der Abbildung dargestellt mit 1 Nm angezogen.



a) Mit welcher Kraft hält die Schraube die Platten zusammen?

b) Um welchen Länge dehnt sie sich dabei?

c) Betrachten Sie die Schraube als Feder mit einer sehr großen Federkonstante. Mit welcher Eigenfrequenz schwingt die Schraube in etwa wenn Sie approximativ als schwingende Masse die Gesamtmasse der Schraube ansetzen (Dichte von Stahl etwa 7,85 g/cm^3).

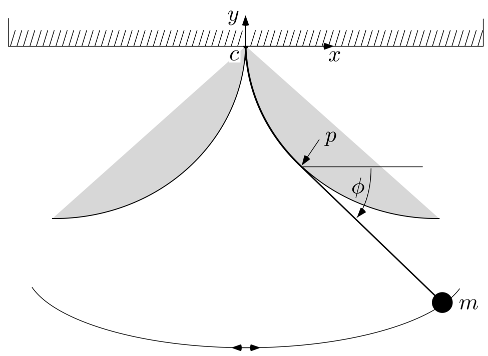
d) Welche elastische Energie steckt in der angezogenen Schraube?

e) Wie ändert sich der Durchmesser der Schraube durch das Festziehen? (Poissonzahl von Stahl: 0,29).

f) Um welchen Winkel wird die Schraube durch das Anziehen verdrillt?
Hinweis: Nehmen Sie an, dass es zwischen der Oberseite der Platte und der Schraube keine Reibung gibt und die Mutter auf der Unterseite der Platte fixiert ist.

Aufgabe 43 Isochrones Pendel

Die Frequenz eines mathematische Pendels ist im allgemeinen eine Funktion der Amplitude. Zur Vereinfachung wird oft die Kleinwinkelnäherung verwendet (vgl. Aufgabe 34). Bereits im 17. Jahrhundert erfand Christian Huygens die skizzierte Pendelaufhängung mit der die Frequenz des Pendel unabhängig von der Amplitude wird. Diese Eigenschaft wollen wir in dieser Aufgabe nachvollziehen. Ein Faden mit der Länge l ist im Punkt c (Koordinatenursprung) befestigt und bildet zusammen mit der Masse m das Pendel. Der Faden wird dabei durch eine Begrenzung in Form zweier Zykloiden (nicht zu verwechseln mit der Epizykloiden) in seiner effektiven Länge begrenzt:



Diese Längenbegrenzung ist abhängig vom Punkt p auf der skizzierten Zykloide. Letzte wird wie folgt durch den Parameter θ beschrieben:

$$x = \rho(\theta - \sin(\theta)) \qquad y = \rho(\cos(\theta) - 1)$$

a) Plotten Sie die Zykloide für einen passenden Parameterbereich. Zeigen Sie, dass die Länge der Strecke auf der Zykloide vom Punkt c zum Punkt p gegeben ist durch:

$$\lambda = 4\rho\left(1 - \sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}\right)$$

Dabei ist ρ der Radius des charakteristischen Kreises der Zykloide.

b) Die Position der als Punkt gedachten Masse (kein Trägheitsmoment) kann als Funktion des Ablösepunkts $p = (x, y)$ von der Zykloide, d.h. als Funktion des Parameters θ angeben werden:

$$x_m = x + (l - \lambda)\cos(\phi) \qquad y_m = y + (l - \lambda)\sin(\phi)$$

Damit fehlt nur noch der Winkel ϕ, bzw. dessen sin und cos um die Position der Masse zu bestimmen. Erklären und benutzen Sie

$$\tan(\phi) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^{-1}$$

und

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

um zu zeigen:

$$\sin(\phi) = -\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}} \qquad \cos(\phi) = \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}$$

c) Zeigen Sie, dass für die spezielle Wahl $\rho = l/4$ die Position der Masse unabhängig von ϕ wird und durch

$$x_m = \rho\,(\theta + \sin(\theta)) \qquad y_m = -\rho\,(3 + \cos(\theta))$$

gegeben ist.

d) Um die Dynamik der Pendelbewegung zu beschreiben müssen die Sie Zeitableitung $\dot{\theta}$ betrachten. Zeigen, dass aus der als konstant angenommenen Gesamtenergie (keine Reibung) folgt:

$$\rho\,\dot{\theta}^2\,(1 + \cos(\theta)) = g\,(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$$

mit einer zunächst unbestimmten Integrationskonstanten $\cos(\theta_0)$ und der Gravitationsbeschleunigung g.

e) Berechnen Sie die Schwingungsdauer mit

$$T = \int \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$$

Überlegen Sie welches die korrekten Integrationsgrenzen sind.

Aufgabe 44 Norton's Dome

Die klassische Mechanik wird als streng kausal angesehen. Dies bedeutet: gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen. Wir können daher (zumindest im Prinzip) die Zukunft und die Vergangenheit eines jeden Systems berechnen, falls wir nur den Zustand des Systems (alle Orte und Geschwindigkeiten) zu einem bestimmten Zeitpunkt kennen. Ein Gedankenexperiment von John D. Norton [1] scheint diese fundamentale Annahme zu verletzen und hat zu kontroversen Diskussionen geführt. Vielleicht können Sie sich anhand der folgenden Aufgabe eine eigene Meinung dazu bilden.

a) Begründen Sie zunächst warum mit einer Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichung $\vec{r}(t)$ auch die rückwärts laufende Bewegung $\vec{r}(-t)$ eine Lösung ist. Aus welcher mathematischen Eigenschaft der Newton'schen Bewegungsgleichung folgt dies?

b) Wir betrachten einen Massenpunkt der auf einer Kuppel ("Dome") reibungslos hinab und hinauf gleiten kann und versuchen die Frage zu klären, ob Sie diesen (im Prinzip) mit einer exakt bemessenen Anfangsgeschwindigkeit v_0 so hinauf rollen können, dass er oben (bei $r = 0$) exakt stehen bleibt. Überlegen Sie durch welche Größe der Zeitpunkt t_0 bestimmt ist, bei dem der Massenpunkt bei $r = 0$ ankommt. Überlegen Sie weiter auf welche Weise t_0 bei einer rückwärts laufenden Bewegung bestimmt ist.

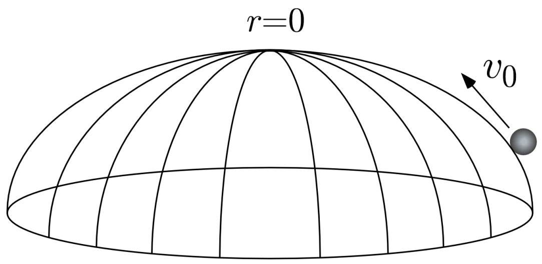


Figure 1: "Dome"

c) Wir betrachten jetzt eine spezielle Kuppel deren Höhe mit dem Abstand von der Achse r wie $r^{3/2}$ abnimmt. Das radiale Potential lässt sich durch $E_{pot} = -(2/3)mgr^{3/2}$ mit einer Konstanten $[g]$ = N/kg m$^{1/2}$ ausdrücken. Bestimmen Sie die Kraft aus dem Potential und stellen Sie die Bewegungsgleichung des Massenpunktes mit der Masse m auf, der sich in diesem Potential bewegt.

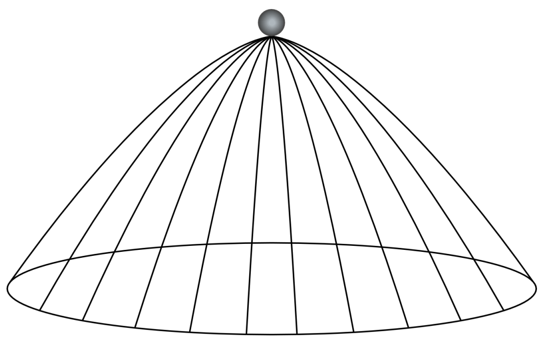


Figure 2: Norton's Dome

[1] siehe `https://sites.pitt.edu/~jdnorton/Goodies/Dome/`

d) Zeigen Sie, dass eine Lösung der Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen $r(t=0) = \dot{r}(t=0) = 0$ (neben der trivialen Lösung $r(t) = 0$) lautet:

$$r(t) = \begin{cases} (a/144)\,(t-t_0)^4 & \text{für } t \geq t_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

Können Sie, wie gewöhnlich, aus den Anfangsbedingungen die Konstante t_0 bestimmen? Zu welchem Zeitpunkt t_0 setzt sich der Massenpunkt in Bewegung? Bestimmen Sie die Kraft auf den Massenpunkt zum Zeitpunkt $t = t_0$ in Bewegung setzt. Aus welcher mathematischen Besonderheit ergeben sich diese merkwürdigen Eigenschaften?

e) Vielleicht liegt das seltsame Verhalten in d) an der unstetigen Funktion E_{pot} die bei $r = 0$ nur mit einer unendlich spitzen Kuppel realisiert werden kann. Überlegen Sie, ob es ein *fundamentales* Naturgesetz geben könnte welches unendlich spitze Spitzen verböte. Oder handelt es sich "nur" um ein technisches Problem diese herzustellen?

f) Zum Schluss versuchen wir noch eine andere Kuppelform, die auch bei $r = 0$ stetig differenzierbar ist. Ein nahe liegendes Beispiel wäre eine kugelförmige Kuppel. Leider führt dies auf eine Differentialgleichung mit einer komplizierten Lösung. Einfacher ist es ein parabelförmiges Potential zu betrachten $E_{pot} = -(1/2)mg^2r^2$ mit einer neuen Konstanten $[g] = (\mathrm{N/kg\ m})^{1/2}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung und versuchen Sie mit dieser Lösung den Massenpunkt von einem Radius $r(t=0) = r_0$ aus mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\dot{r}(t=0) = -v_0$ die Kuppel so hinauf zu rollen, dass dieser bei $r = 0$ zur Ruhe kommt. Geht das?