Übungsaufgaben zu E1 / E1p Mechanik, WS 2021/22

Thomas Udem, Karl-Heinz Mantel

Fakultät für Physik, Ludwig-Maximilians-Universität, München

Blatt 10 wird besprochen am 19./20./21.01.2022

Anmerkung: Lehramtsstudierende und Studierende mit Nebenfach (6 ECTS) brauchen Aufgaben, die mit einem (*) gekennzeichnet sind, nicht zu bearbeiten.

Aufgabe 37 Gedämpfter harmonischer Oszillator

In der Vorlesung wurde die gedämpfte harmonische Schwingung vorgestellt. Eine Masse m die mit einer linearen Rückstellkraft $F = -Dx$ zur Ruhelage gezogen wird und einer geschwindigkeitsabhängigen Reibungskraft $F_r = -b\dot{x}$ ausgesetzt ist wird mit folgender Differentialgleichung beschrieben:

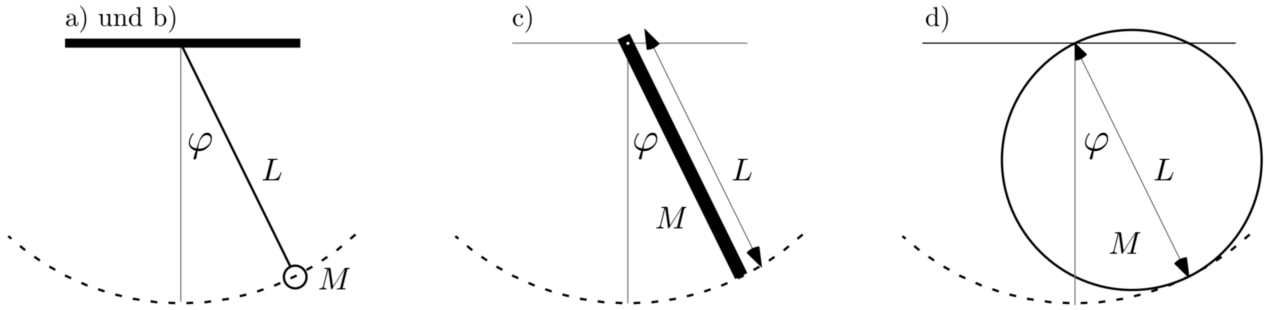
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1}$$

Hierbei ist x die Auslenkung von der Ruhelage, $\gamma = b/(2m)$ die Dämpfungskonstante, und $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ die Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators. Die Differentialgleichung kann durch den Ansatz $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ gelöst werden, mit $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$.

a) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den Fall überdämpfter (=stark gedämpfter) Schwingung $\gamma > \omega_0$. Betrachten Sie dafür die beiden Fälle ($x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$) und ($x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$).

b) Zeigen Sie dass $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\gamma t}$ die Lösung für den aperiodischen Grenzfall $\gamma = \omega_0$ ist. Bestimmen Sie die Lösungen für die Anfangsbedingungen ($x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$) und ($x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$) und zeichnen Sie $x(t)$ für die beiden Fälle. Was ist an diesem Spezialfall besonders?

Aufgabe 38 **Pendel** Drei Körper von jeweils der Masse M sind als Pendel aufgehängt:



a) Eine Punktmasse an einem masselosen Faden der Länge L: stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Winkel $\varphi(t)$ auf.

b) Geben Sie die Näherung für kleine Winkel an und bestimmen Sie die Schwingungsdauer T des Pendels mit dem Ansatz $\varphi(t) = A\sin(\omega t)$.

Im folgenden verwenden wir statt der Punktmasse massive Körper. Benutzen Sie weiterhin die Näherung für kleine Winkel.

c) Wie groß ist die Schwingungsdauer T für einen schwingenden Stab?

d) Wie groß ist die Schwingungsdauer T für einen Ring mit Radius $R = L/2$ und Masse M?

Aufgabe 39 **Oszillation im effektiven Potential *** In Blatt 6 Aufgabe 26 hatten wir das effektive Potential diskutiert, das für die Beschreibung der Radialbewegung einer Masse m im Zentralkraftfeld hilfreich ist. Wir hatten dazu das Zentralpotential

$$E(r) = -\frac{c}{r^\lambda} \tag{2}$$

betrachtet, wofür man das effektive Potential $E_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{c}{r^\lambda}$ findet, das im Abstand $r_0 = (L^2/(\lambda mc))^{1/(2-\lambda)}$ ein Minimum aufweist.

a) Zeigen Sie, dass man für die Kreisfrequenz ω_0 eines Umlaufs auf einer Kreisbahn mit Radius r_0 folgenden Ausdruck erhält:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c\lambda}{mr_0^{\lambda+2}}} \tag{3}$$

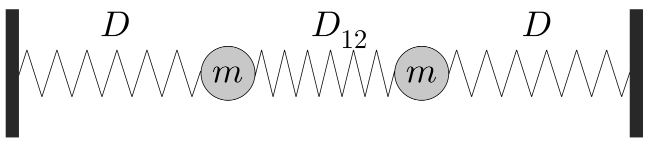
b) Betrachten Sie nun zusätzlich zur Kreisbewegung kleine Schwingungen um die Kreisbahn in radialer Richtung. Wie lautet das effektive Potential für diese radiale Bewegung im Fall kleiner Schwingungen? Führen Sie dazu eine Taylorentwicklung von E_{eff} bis zur zweiten Ordnung durch.

c) Ermitteln Sie die Ozillationsfrequenz ω_R für radiale Oszillationen im genäherten Potential und leiten Sie den Zusammenhang zwischen ω_R und ω_0 her.

d) Welche Beziehung muss λ erfüllen, damit sich trotz kleiner radialer Schwingung periodische, geschlossene Orbits ergeben?

e) Diskutieren Sie das Verhältnis ω_R/ω_0 für den Fall des Coulomb-und Gravitations-Potentials und für den Fall des harmonischen Oszillators.

Aufgabe 40 **Gekoppelte Oszillatoren** Zwei Massen (Oszillatoren) und drei Federn sind wie dargestellt angeordnet, so dass sie sich ohne Reibung horizontal bewegen können.



a) Die Positionen der Massen in Ruhelage sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$. Geben Sie die Bewegungsgleichung der Massen m an.

b) Entkoppeln Sie die Bewegungsgleichung der Massen in a) indem Sie ein geeignete Linearkombination der Positionen $\xi^\pm = ax_1 \pm bx_2$ verwenden. Geben sie die Frequenzen an mit der die Koordinaten ξ^+ und ξ^- variieren.

c) Nehmen Sie an, nur die rechte Masse schwingt zum Zeitpunkt $t = 0$ und $D_{12} = (21/200)D$. Zeichnen Sie die Positionen x_1 und x_2 für mindestens 11 Perioden von x_1. Wann kommt die rechte Masse bei $x_1 = 0$ wieder zur Ruhe?

d) In Aufgabenteil a) bis c) erkennen wir, dass zwei Massen mit zwei "Moden" schwingen können. Überlegen Sie mit wie viel Moden drei Massen schwingen können. Skizzieren Sie diese Moden.

Aufgabe 41 **Anharmonisches Pendel *** Das Fadenpendel aus der Vorlesung genügt der Differenzialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0$$

Jetzt versuchen wir eine approximative Lösung für die nächste Ordnung $\sin(\varphi) \approx \varphi - \varphi^3/6$ zu finden. Verwenden Sie

$$\sin(x)^3 = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

und betrachten Sie den zusätzlichen Term als Störung, für den Sie als Approximation die ungestörte Lösung einsetzen. Welche zusätzlichen Eigenschaften besitzt das anharmonischePendel in dieser Näherung?