Übungsaufgaben zu E1 / E1p Mechanik, WS 2021/22

Thomas Udem, Karl-Heinz Mantel

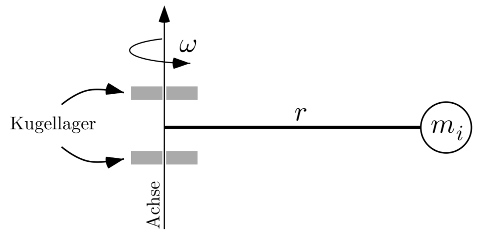
Fakultät für Physik, Ludwig-Maximilians-Universität, München

Blatt 9 wird besprochen am 12./13./14.1.2022

Anmerkung: Lehramtsstudierende und Studierende mit Nebenfach (6 ECTS) brauchen Aufgaben, die mit einem (*) gekennzeichnet sind, nicht zu bearbeiten.

Aufgabe 34 Kreisel und Drehbewegung

a) Ein Massenpunkt rotiert wie dargestellt um eine raumfeste masselose Achse.

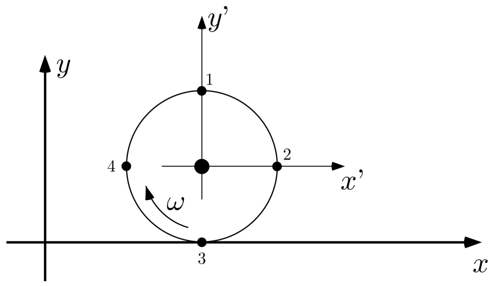


Geben Sie den Drehimpuls und die kinetische Energie mit und ohne Verwendung des Trägheitsmoments an.

b) Geben Sie die periodische Kraft auf die Achslager an.

c) Wo könnten Sie eine geeignete zweite Masse platzieren um den Rotator in a) auszuwuchten? Verallgemeinern Sie auf viele Massenpunkte.

d) Ein Autoreifen mit dem Radius R rollt im “Laborsystem” (x, y) auf der $y = 0$ Ebene mit der Geschwindigkeit ωR wie dargestellt nach rechts.



Das Ventil befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ bei der Position 1. Geben Sie den Ort $\vec{r}\,'_v$ und die Geschwindigkeit $\vec{v}\,'_v$ des Ventils in den gestrichenen Koordinaten an die ihren Ursprung in der Radachse haben und sich mit diesem bewegen.

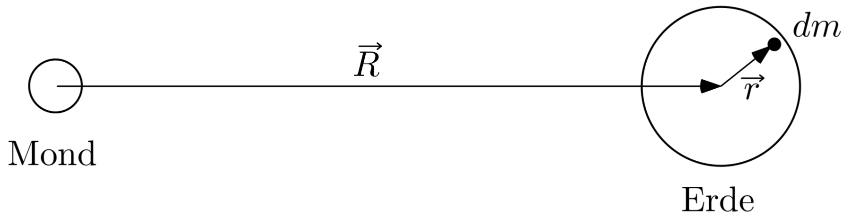
e) Berechnen Sie mit $\vec{v}\,' = \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$ die Geschwindigkeiten in den Punkten 1, 2, 3 und 4. Ist dies identisch mit der Ventilgeschwindigkeit?

f) Beschreiben Sie nun die Bewegung im "Laborsystem". Um welchen Punkt befindet sich die momentane Drehachse des Rads?

g) Ihr neuer Sportwagen ($m = 1000$ kg ohne Räder) hat statt einem Rad vier dergleichen $R = 30\,cm$ und beschleunigt von 0 auf 100 in 8 Sekunden. Die Felgen haben eine Masse von $M = 15\,kg$ und können durch eine Scheibe homogener Masse beschrieben werden. Sie sind mit der Performance nicht zufrieden und tauschen die Felgen durch Alu–Felgen mit der halben Masse, aber ansonsten gleiche Abmessungen aus. Wie schnell sind sie von 0 auf 100?

Aufgabe 35 Gezeiten

In einem einfachen Modell sollen die Gezeitenkräfte beschrieben werden. Dazu nehmen wir an, das die Erde vollkommen mit Wasser bedeckt ist. Effekte der Eigenrotation der Erde und die Anziehungskraft der Sonne sollen vernachlässigt werden.



Dabei sind M_M und M_E die Masse von Mond und Erde, R der Abstand der Massenzentren Erde-Mond. Wir betrachten die Kräfte, die auf ein kleines Massenelement dm im Ozean der Erde wirken. Der Abstand des Massenelements zum Erdmittelpunkt wird mit r bezeichnet.

a) Warum entsteht sowohl auf der dem Mond zugewandten Seite und der dem Mond abgewandten Seite ein Flutberg?

b) Nehmen Sie zunächst an, das Massenelement dm sei genau wie die Erde im freien Fall um den Mond. Zeigen Sie, dass die relative Beschleunigung des Massenelements und des Schwerpunkts der Erde gegeben ist durch:

$$\ddot{\vec{r}} = -GM_E \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} - GM_m \left(\frac{\vec{R} + \vec{r}}{|\vec{R} + \vec{r}|^3} + \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3} \right)$$

c) Warum sind für die Entstehung von Ebbe und Flut auf der Erde nur die beiden letzten Terme von $\ddot{\vec{r}}$ entscheidend?

d) Mit den beiden letzten Termen aus Aufgabenteil b) ergibt sich nun die Kraft F_T auf das Massenelement dm an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche. Geben Sie damit explizit die Kraft F_T auf der dem Mond zu- und abgewandten Seite an.

Aufgabe 36 Lunisolare Präzession

Wir leben auf einem großen Kreisel der ohne äußere Drehmomente seine Achse im Raum beibehalten würde. Die Erdachse ist um $\theta = 23,4^\circ$ gegen die Ekliptik geneigt. Aus dieser Neigung ergeben sich Sommer und Winter.

a) Welches Drehmoment üben die Sonne und der Mond auf eine als perfekt kugelförmig gedachte Erde aus?

b) Durch die Rotation der Erde nimmt diese in etwa die Gestalt eines Ellipsoids an. Dadurch ergeben sich zwei etwas unterschiedliche Trägheitsmomente mit $(I_\parallel - I_\perp)/I_\parallel \approx 1/300$ wobei $I_\parallel$ und $I_\perp$ die Trägheitsmomente der Erde bei der Rotation um die Pole und um eine Achse senkrecht dazu sind. Überzeugen Sie sich zunächst, dass das Drehmoment der Sonne sich nicht durch die jahreszeitliche Variation heraus mittelt. Zeichnen Sie dafür die Richtung der Drehmomente durch die Sonne im Frühjahr, Sommer, Herbst un Winter ein. Können Sie das selbe Argument für den Mond geltend machen?

c) Die Kraft der Sonne auf ein Massenelement der Erde dm ist, wie in der Abbildung zur Aufgabe 32 für den Mond dargestellt, gegeben durch

$$d\vec{F} = -GMdm\,\frac{\vec{R}+\vec{r}}{|\vec{R}+\vec{r}|^3}$$

mit der Masse der Sonne M. Entwickeln Sie diesen Ausdruck für $R \gg r$ (z.B. $1/(\sqrt{1+x})^3 \approx 1-3x/2+\ldots$) und verwenden Sie $(\vec{R}\cdot\vec{r})\vec{r} = r^2\vec{R}-\vec{r}\times(\vec{R}\times\vec{r})$ ("BAC-CAB-Formel ") sowie $GM/R^3 = (2\pi/T)^2$ (3. Keppler–Gesetz) um den folgenden Ausdruck für der Drehmoment abzuleiten:

$$\vec{D} = \frac{12\pi^2}{T^2R^2}\,\vec{R}\times\int_V \vec{r}\times\left(\vec{R}\times\vec{r}\right)dm$$

d) Zeigen Sie

$$\int_V \vec{r}\times\left(\vec{R}\times\vec{r}\right)dm = \hat{I}\vec{R}$$

wobei der Trägheitstensor im körperfesten Schwerpunktsystem der Erde gegeben ist durch:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_\perp & 0 & 0 \\ 0 & I_\perp & 0 \\ 0 & 0 & I_\parallel \end{pmatrix}$$

Betrachten Sie dazu die Gleichung Komponentenweise.

e) In geozentrischen Koordinaten folgt die Sonne der Bahn

$$\vec{R} = R\begin{pmatrix} \cos(\Omega t) \\ \sin(\Omega t)\cos(\theta) \\ \sin(\Omega t)\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

mit $\Omega = 2\pi/T$, $T = 1$ Jahr, $\theta = 23,4^\circ$, und $R = 150$ Millionen km. Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus c) und d) das Drehmoment der Sonne auf die Erde und mitteln sie über viele Jahre. Ändert sich durch dieses Drehmoment die Tageslänge? Berechnen Sie die Periodendauer der Präzession der Erdachse durch die Sonne.