

# Übungsaufgaben zu E1 / E1p Mechanik, WS 2021/22

Thomas Udem, Karl-Heinz Mantel

Fakultät für Physik, Ludwig-Maximilians-Universität, München

Blatt 8

wird besprochen am 15./16./17.12.2021

**Anmerkung:** Lehramtsstudierende und Studierende mit Nebenfach (6 ECTS) brauchen Aufgaben, die mit einem (\*) gekennzeichnet sind, nicht zu bearbeiten.

## Aufgabe 31 Spezielle Relativität Paradoxien

- a) Eine Raumschiff fliegt mit der Geschwindigkeit  $v = 0.9c$  an der Erde vorbei. Die Besatzung frühstückt gerade und die Eier sollen 5 min gekocht werden. Wie lange müssen die Eier im Topf bleiben wenn der Schiffskoch eine Uhr auf der Erde abliest? Muss er die Zeitdilatation berücksichtigen wenn er statt dessen die Raumschiffuhr verwendet?
- b) Sie möchten zum Ende des Universums in 13,7 Milliarden Lichtjahren Entfernung reisen. Ihr Raumschiff schafft mit der neusten Warp-Technologie stolze 99,999 999 999 999 999 9% der Lichtgeschwindigkeit. Wie lange brauchen Sie bis ans Ziel wenn Sie ihre mitgeführte Uhr ablesen um die Reisezeit zu messen? Vernachlässigen Sie die in der Praxis sehr lange Beschleunigungsphase. (Tipp: falls Ihr Taschenrechner Probleme bei der Berechnung von  $\gamma$  hat, versuchen Sie eine geeignete Näherung.)
- c) Wie viel älter sind Sie bei der Ankunft geworden? Wie viel älter sind die Menschen auf Erde bei Ihrer Ankunft geworden? Wie viel älter sind die Menschen auf Erde wenn sie Sie ankommen sehen? Sie treten die Rückreise mit der gleichen Geschwindigkeit an. Wie viel älter sind Sie und die Erdenmenschen bei Ihrer Rückkehr? Wieso ist die Situation nicht symmetrisch, in dem Sinne, dass die Erdenmenschen behaupten Sie sind jung geblieben? **und** umgekehrt?
- d) Sie stehen in Ihrem Garten und sehen wie der Nachbar mit einem 10 m langen Balken auf der Schulter mit einer Geschwindigkeit von  $v = 0.5c$  in seine 9 m lange Garage rennt. In Ihrem Bezugssystem ist der Balken auf 8,66 m Lorentz kontrahiert, passt also in die Garage. In dem Moment wo Ihr Nachbar mit dem Balken in der Garage verschwindet schmeißt er die Tür hinter sich zu. Wie stellt sich die Situation im Bezugssystem des Nachbarn dar?
- e) Ein Schiff fährt mit der Geschwindigkeit  $v_s$  auf einen Steg zu auf dem Sie sich befinden. Auf dem Schiff fährt Ihr Kommilitone mit Rollschuhen mit der Geschwindigkeit  $v_k$  relativ zum Schiff in die gleiche Richtung. Mit welcher Geschwindigkeit  $v'_k$  kommt der Kommilitone auf Sie zu? Von der Galilei-Transformation sind wir gewohnt die Geschwindigkeiten zu addieren. Zeigen Sie, dass die Addition von parallelen Geschwindigkeiten  $v_s$  und  $v_k$  in der speziellen Relativitätstheorie nach folgender Formel durchgeführt werden muss:

$$v'_k = \frac{v_s + v_k}{1 + v_s v_k / c^2}$$

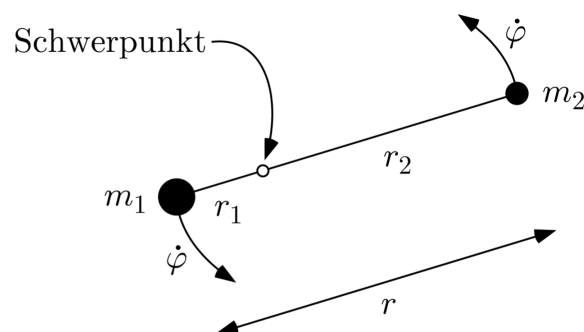
- f) Nun hat der Kommilitone statt Rollschuhe einen Laserpointer und sendet Ihnen auf dem Schiff stehend Licht zu. Er misst die Geschwindigkeit des Lichts aus seinem Laserpointer und findet  $v_L = c$ . Welche Geschwindigkeit des Lichts aus dem Laserpointer erhalten Sie nach dem Additionstheorem in e)?

### Aufgabe 32 Schwerpunktsystem

- a) In der Aufgabe 28 h) wurde der Geschwindigkeitszuwachs einer Sonde nach einem “slingshot” Manöver<sup>1</sup> um die Venus diskutiert. Diese Begegnung kann als elastischer Stoß verstanden werden, wobei die Details (Kepler-Bahn und Anfangsbedingung) die Winkelablenkung bestimmen. Wir hatten die Venus als Inertialsystem behandelt um die maximale Geschwindigkeitsänderung der Sonde zu berechnen. Als Problem wurde erkannt, dass die Venus durch den Stoß ihre Geschwindigkeit ändert und daher streng genommen kein **Inertialsystem** darstellt. Beschreiben Sie nun dasselbe Problem noch einmal mit Schwerpunktkoordinaten und zeigen Sie, dass die Näherung dort gut war, indem Sie die Größe der Korrekturen bestimmen. Die Masse der Sonde sei  $m_s = 1000$  kg und diese sei anfänglich mit  $v_0 = 10$  km/s im Bezug auf die Venus unterwegs.
- b) Bei der Herleitung der Kepler-Bahnen wurde ein raumfestes Zentrum (Sonne), von dem die Kraft ausgeht, angenommen. Wie kann die Rückstoßbewegung dieses Zentrums berücksichtigt werden? Zeigen Sie zunächst, dass der Betrag des Drehimpuls im Schwerpunkt eines Zweikörpersystems gemäß der Graphik durch

$$L = \mu r^2 \dot{\varphi} \quad \text{mit der reduzierten Masse: } \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

gegeben ist.



- c) Nehmen Sie die an die potentielle Energie des einen Körpers im Feld des anderen sei durch

$$E_{pot} = -\frac{\alpha}{r}$$

mit einer Konstanten  $\alpha$  gegeben. Wie groß ist die potentielle Energie des anderen Körpers im Potential des einen? Zeigen Sie, dass sich die selben Kepler-Bahnen wie in der Vorlesung ergeben wobei der Abstand  $r$  durch den Betrag der Relativkoordinaten und die Planetenmasse durch die reduzierte Masse ersetzt wird.

- d) Nehmen Sie an alle Bahnen sind kreisförmig. Um welchen Punkt kreisen die beiden Massen? Zeichnen Sie die Situation für gleich große Massen. Welchen Radius hat die Kreisbewegung der Sonne durch die Gravitation der Erde? Mit welcher Geschwindigkeitsamplitude lässt sich die Rückstoßbewegung der Sonne von außerhalb des Sonnensystems beobachten? Sieht man diese Bewegung von der Erde aus?

<sup>1</sup><https://www.youtube.com/watch?v=l8TA7BU2Bvo>

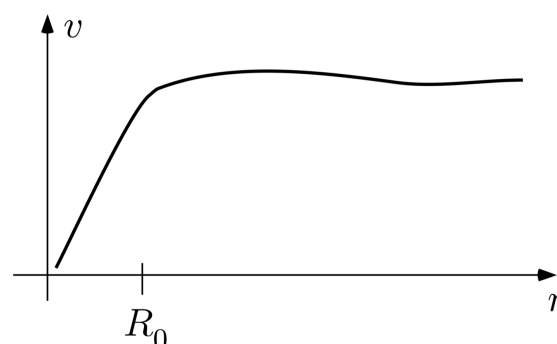
**Aufgabe 33 Anwendung des bereits Gelernten (\*)**

- a) Bei der spontanen Spaltung des Kerns von  $^{235}\text{U}$  werden zusammen mit viel Energie (203 MeV) Neutronen frei gesetzt. Spontane Spaltungen sind aber sehr selten, so dass eine Probe  $^{235}\text{U}$  auf diese Weise nur sehr wenig Energie frei setzt (180,000 spontane Spaltungen pro kg und Sekunde, oder Leistung  $5,9 \mu\text{W}$  pro kg). Die frei werdenden Neutronen können jedoch andere  $^{235}\text{U}$  Kerne zur Spaltung bringen falls sie in dem Kern stecken bleiben. Die hohe kinetische Energie der Neutronen verhindert dies aber. Man muss die Neutronen zunächst durch Stöße abbremesen (moderieren). Neutronen stoßen nicht mit Ladungen weil sie selbst neutral sind, aber mit anderen Kernen wegen der starken Wechselwirkung. Welche Atomkerne würde Sie zum moderieren empfehlen?
- b) Der relativistische Doppler-Effekt ändert die Frequenz der wahrgenommenen elektromagnetischen Strahlung (z.B. Licht oder Mikrowelle) um den Faktor

$$\frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 + v/c}$$

für eine Quelle die sich mit der Geschwindigkeit  $v$  vom Empfänger weg bewegt. Geben Sie die physikalischen Mechanismen an, die zum Nenner und zum Zähler dieses Ausdrucks führen. Entwickeln Sie den Ausdruck für  $v/c \ll 1$  um  $v = 0$ . Welcher physikalische Mechanismus dominiert in erster Ordnung?

- c) Sie beobachten eine in etwa kugelförmige Galaxis mit dem Radius  $R_0$  die um eine Achse senkrecht zur Beobachtungsrichtung rotiert. Sie planen den relativistischen Doppler-Effekt zu verwenden um die Rotationsgeschwindigkeit der Sterne als Funktion des Abstands zur Rotationsachse der Galaxie zu messen. Bestimmen Sie zur Verifikation Ihrer Beobachtung ein Geschwindigkeits-Abstands Gesetz der Form  $v \propto r^n$  wobei  $r$  der Abstand der Sterne zur Achse in der Ebene der größten radialen Ausdehnung der Galaxie sein soll. Nehmen Sie an, dass es außerhalb von  $r = R_0$  noch genügend Sterne gibt um deren Rotationsgeschwindigkeit zu messen, deren Dichte aber so gering ist, dass Sie deren Gravitation vernachlässigen können.
- d) Ihre Messungen ergeben in etwa den dargestellten Graph:



Was schließen Sie daraus? Überlegen und diskutieren Sie zuerst und falls Sie nicht weiter kommen lesen Sie hier nach: <https://de.wikipedia.org/wiki/Rotationskurve>.

- e) Berechnen Sie die Fluchtgeschwindigkeit von einem Planeten mit der Masse  $M$  und Radius  $R$ . Dies ist die Mindestgeschwindigkeit die ein Körper mit der Masse  $m$  haben muss, um den Planeten vertikal zu verlassen und nicht wieder auf ihn zurück zu stürzen. Vernachlässigen Sie die Beschleunigungsphase.

- f) Berechnen Sie nach den Ergebnissen im vorangegangenen Teil den Radius eines Planeten mit der Masse  $M$  von dem nicht einmal das Licht entkommen kann.
- g) Ein großes physikalisches Problem Anfang des 20. Jahrhunderts war das Spektrum bzw. die Existenz von Wasserstoffatomen zu erklären. Man kannte bereits die Elektronen und schwerere positiv geladene Teilchen, die man zunächst “Kanalstrahlen” nannte. Naheliegender war, dass Atome eine Art kleines Sonnensystem sind, bei denen diese Teilchen mit der anziehenden elektrischen Kraft

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

aneinander gebunden sind. Hierbei ist die “Gravitationskonstante” aus praktischen Gründen als  $1/4\pi\epsilon_0$  geschrieben. Die Ladung von Kern und Elektronen ist durch  $e$  gegeben. Zwei massive Probleme ergeben sich aus diesem Modell:

- i) Wie man aus den Maxwellgleichungen herleiten kann, strahlen beschleunigte Ladungen Energie ab. Daher sollte das Elektron im Wasserstoffatom innerhalb von etwa  $10^{-12}$  s in den Kern stürzen. Stabile Atome sollte es daher gar nicht geben.
- ii) Man wusste schon seit Balmer (1885), dass die Energie des Elektrons im Wasserstoffatom nur bestimmte Werte  $\propto 1/n^2$  mit einer ganzen Zahl  $n$  annehmen kann. Die Kepler-Bahnen kennen keine solche Einschränkung.

Zeigen Sie, dass sich beide Probleme lösen lassen, falls man die esoterische Annahme macht, das Elektron sei eine Welle mit einer Wellenlänge  $\lambda = h/p$ , wobei  $p$  der Impuls und  $h$  eine neue Konstante ist. *Tipp:* Achten Sie darauf, dass die Elektronenwelle mit sich selbst konstruktiv interferiert.