Übungsaufgaben zu E1 / E1p Mechanik, WS 2021/22

Thomas Udem, Karl-Heinz Mantel

Fakultät für Physik, Ludwig-Maximilians-Universität, München

Blatt 6 wird besprochen am 01./02./03.12.2021

Anmerkung: Lehramtsstudierende und Studierende mit Nebenfach (6 ECTS) brauchen Aufgaben, die mit einem (*) gekennzeichnet sind, nicht zu bearbeiten.

Aufgabe 24 Komet Halley und Pulsar

a) Der Komet Halley hatte am 9. Februar 1986 seinen letzten Periheldurchgang bei einer Periheldistanz von $r_p = 0,586$ AU. Die numerische Bahnexzentrizität beträgt $\varepsilon = 0,967$. Skizzieren Sie seine Bahn maßstabsgetreu. Wie groß sind die große und die kleine Halbachse? In welchem Jahr erfolgt der nächste Periheldurchgang?

b) In der Vorlesung wurde erläutert warum es schwierig ist Funktionen $r(t)$ und $\varphi(t)$, die die Kepler Bahn beschreiben, anzugeben. Erläutern Sie, warum dies in Aufgabe 14 e)-g) möglich schien?

c) Immerhin lassen sich einfache Funktionen für $v(r)$ und $v(\varphi)$ für die Kepler Bahn angeben. Leiten Sie diese aus dem Energiesatz her. Vernachlässigen Sie, wie in der Vorlesung, die kinetische Energie der Sonne indem Sie das Kraftzentrum als raumfest im Zentrum des Koordinatensystems bei $r = 0$ annehmen.

d) Der Pulsar 4C21.51 hat eine Rotationszeit von $1,6\,\mathrm{ms}$. Welchen Radius R kann der Pulsar höchstens aufweisen unter der Annahme, dass die Rotationsgeschwindigkeit an der Oberfläche höchstens gleich der Lichtgeschwindigkeit c sein kann?

e) Damit der Stern mit der Masse M nicht zerrissen wird, muss die Gravitationskraft F_G, die auf die Materie an seiner Oberfläche (Probemasse m_P) ausgeübt wird genügen, um die für die Rotation benötigte Zentripetalbeschleunigung a_z aufzubringen. Wie groß ist die Dichte ρ_P des Pulsars mindestens?

f) Vergleichen Sie die in e) berechnete Dichte ρ_P mit der Dichte von Neutronen ($m_N = 1,67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $r_N = 1,2 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$).

Aufgabe 25 Gravitation

Die gravitative Bindungsenergie ist diejenige Energie, die notwendig ist, um einen durch Gravitation gebundenen Körper in seine einzelnen Bestandteile zu zerlegen und diese jeweils unendlich weit voneinader zu entfernen. Gleichbedeutend damit ist die Energie, die frei wird, wenn die einzelnen Bestandteile aus dem Unendlichen kommend zu einem durch Gravitation gebundenen Körper zusammengesetzt werden.

a) Zeigen Sie, dass die gravitative Bindungsenergie E_G einer Kugel mit Radius R und homogener Dichte ρ und Masse M beschrieben wird durch:

$$E_G = \frac{3\,G\,M^2}{5\,R}$$

wobei G die Gravitationskonstante ist.
Hinweis: Man betrachtet dazu die Bindungsenergie einer kleinen Kugel mit Radius r, der weitere dünne Schichten mit Masse dM hinzugefügt werden bis der Radius R erreicht ist.

b) Berechnen Sie mit der in Teilaufgabe a) abgeleiteten Formel die gravitative Bindungsenergie E_G der Erde. In welcher Form liegt diese Energie vor? Wieviele Jahre könnte damit der Weltenergiebedarf gedeckt werden?

c) Geben Sie die gravitative Bindungsenergie E_G der Erde in Einheiten der Gesamtenergie $E_S = Mc^2$ der Erde an.

d) Schätzen Sie den Anteil der negativen Bindungsenergie an der Gesamtenergie Mc^2 des Universums. Nehmen Sie an, dass es 300 Milliarden Galaxien mit jeweils 100 Milliarden Sternen von der Größe unserer Sonne gibt. Der Radius des sichtbaren Universums beträgt 13,7 Milliarden Lichtjahre.

Aufgabe 26 Effektives Potential

Die Radialbewegung eines Körpers im Zentralkraftfeld kann mit Hilfe des effektiven Potentials E_{eff} veranschaulicht werden. Hierfür zerlegt man die Gesamtenergie in einen Radialteil und einen Winkelanteil,

$$E = E_p(r) + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_p + \frac{L^2}{2mr^2} + E_{\text{rad}} = E_{\text{eff}} + E_{\text{rad}}.$$

a) Warum lässt sich der Term $L^2/(2mr^2)$ als Potential behandeln?

b) Skizzieren Sie $E_{\text{eff}}(r)$ für $E_p(r) = -GmM/r$.

c) Bestimmen Sie für $E_p(r) = -GmM/r$ den Ort r_0 an dem $E_{\text{eff}}(r)$ minimal wird, $E_{\text{eff}}(r_0) = E^m_{\text{eff}}$.

d) In welchen Bereichen kann sich der Körper für die Fälle $E = E^m_{\text{eff}}$, $E^m_{\text{eff}} < E < 0$ und $E > 0$ aufhalten? Was sind die entsprechenden Bewegungsformen? Zeichnen Sie die Bereiche in das Diagramm ein.

Betrachten Sie nun das Zentralpotential

$$E_p(r) = -\frac{c}{r^\lambda}$$

e) Wie lautet das zugehörige effektive Potential?

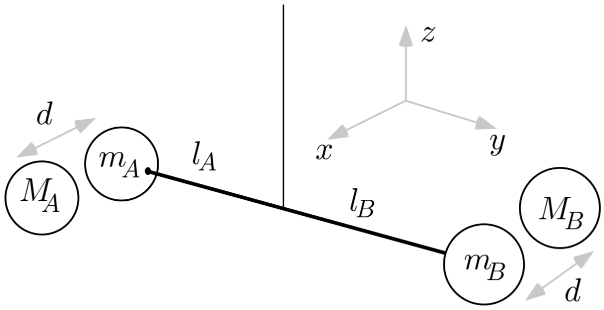
f) Finden Sie die Beziehung zwischen Radius und Drehimpuls, für die sich der Körper auf einer stabilen Kreisbahn bewegt.

h) Gibt es stabile Umlaufbahnen für $\lambda = 2$?

Aufgabe 27 Cavendish und Eötvös (*)

a) Lesen Sie die Orginalarbeit von Eötvös[1] (s. auch Homepage/Materialien) über seine Experimente zur trägen und schweren Masse und ermitteln Sie mit welcher relativen Genauigkeit man im Jahr 1889 Massen vergleichen könnte.

b)



Berechnen Sie das vertikale Drehmoment (Richtung des Drehmomentvektors) am Balken der dargestellten Gravitationswaage durch die orstfesten Massen $M_A = M_B = 1,5$ kg, $m_A = m_B = 38,3$ g mit $l_A = l_B = 50$ mm und $d = 47$ mm.

c) Verwenden Sie das Coulomb Gesetz

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{d^2}$$

um abzuschätzen wie viel überschüssige Ladung Sie auf den Massen tolerieren können bevor diese die Gravitationskraft überwiegt. Wie viele Elektronen sind das? Um welchen Faktor ist die Couloumbkraft zwischen zwei Elektronen größer als deren Gravitation?

d) Sie entfernen nun die beiden Massen M_A und M_B und begeben sich mit neuen Massen $m_A \neq m_B$ nach Budapest (nördliche Breite $47,5°$). Berechnen Sie die horizontale a_x und vertikale Komponente a_z der Zentripetalbeschleunigung durch die Erdrotation wobei die z-Achse nach oben und der Balken der Gravitationswaage in Ost-West Richtung ausgerichtet sein soll.

e) Zeigen Sie, dass das vertikale Drehmoment an der Gravitationswaage gegeben ist durch:

$$T = l_A m_{tA} a_x g \left[\frac{\frac{m_{sB}}{m_{tB}} - \frac{m_{sA}}{m_{tA}}}{\frac{m_{sB}}{m_{tB}}g - a_z}\right]$$

wobei Sie jetzt zwischen den schweren Massen m_{sA} und m_{sB} sowie den trägen Massen m_{tA} und m_{tB} unterscheiden. Nehmen Sie an die Gravitationswaage sei horizontal im Gleichgewicht, d.h. $l_A \neq l_B$.

f) Wie groß ist dieses Drehmoment falls es keinen Unterschied zwischen träger und schwerer Masse gibt?

g) Wir wissen aus den Fall Experimenten schon, dass m_{tB}/m_{sB} sehr nah bei 1 ist. Vernachlässigen Sie horizontale Zentripetalbeschleunigung gegenüber der Erdbeschleunigung. Zeigen Sie, dass der gewonnene Ausdruck für das horizontale Drehmoment von der Differenz der Verhältnisse der trägen und schweren Massen abhängt.

h) Nehmen Sie an die Gravitationswaage ist durch die richtige Wahl der Armlängen trotz $m_{sA} \neq m_{sB}$ im Gleichgewicht. Nun drehen Sie den gesamten Apparat um 180° in West-Ost Orientierung. Was beobachten Sie falls träge und schwere Masse nicht im Verhältnis 1:1 stehen? Ist es möglich, dass die nicht ganz so gute Näherung in g) ein eventuelles Null-Experiment erklären kann?

i) Ist es möglich, dass das Verhältnis von träger und schwerer Masse von m_A gleich 1 ist während dieses Verhältnis für m_B ungleich 1 ist?

[1] https://archive.org/stream/mathematischeun07unkngoog#page/n94/mode/2up