Übungsaufgaben zu E1 / E1p Mechanik, WS 2021/22

Thomas Udem, Karl-Heinz Mantel

Fakultät für Physik, Ludwig-Maximilians-Universität, München

Blatt 1 wird besprochen am 27.-29.10.2021

Anmerkung: Lehramtsstudierende und Studierende mit Nebenfach (6 ECTS) brauchen Aufgaben, die mit einem (*) gekennzeichnet sind, nicht zu bearbeiten.

Aufgabe 1 Energie - schätzen und googeln Sie mal

Der Physiker Enrico Fermi war ein Meister im schnellen Kopfrechnen und hatte die Antwort schwieriger physikalischer Probleme lange bevor seine Kollegen mit ihren exakten Rechnungen fertig waren. Er ging dabei so vor, dass er das Problem auf das Wesentliche reduzierte und nur die Größenordnung der beteiligten physikalischen Größen abschätzte. Bestimmen Sie in diesem Sinne die folgenden Größen.

a) Das Fröttmaninger Windrad der Stadtwerke München erzeugt jährlich eine Energie $E_W = 2000$ MWh. Wie viel Benzin/TNT/Restmüll müsste kontinuierlich verbrannt werden um die gleiche Leistung zu erzeugen (siehe Tabelle in https://de.wikipedia.org/wiki/Energiedichte).

b) Schätzen Sie wieviel Benzin von allen Autos in München im zeitlichen Mittel verbrannt wird. Wieviele Windräder vom Fröttmaninger Typ bräuchte man um alle Autos in München mit dieser Energiequelle betreiben zu können?

c) Wieviel Fläche wird benötigt um den gesamten Energiebedarf eines Bundesbürgers zu decken? Welcher Anteil an der Gesamtfläche der BRD wird benötigt um alle Bundesbürger auf diese Weise mit Energie zu versorgen? Gehen Sie von einem Endenergieverbrauch in der BRD von 10 exaJ/a aus.

d) Schätzen Sie die zu erwartende Klimaänderung durch das Anzapfen dieser Energie durch (schwarze) Photovoltaik-Module. Hinweis: die Albedo der Erde beträgt ca. $0,3$.

Aufgabe 2 Längenskalen und Einheiten

Eine der genauesten Längenmessungen weltweit wird derzeit mit Gravitationswellendetektoren wie dem LIGO-Experiment durchgeführt. Dabei wird die Länge zweier 4 km langer Messstrecken mit einer relativen Genauigkeit von $3 \cdot 10^{-22}$ verglichen.

a) Bestimmen Sie die absolute Genauigkeit der Messung in Metern.

b) Wievielen Atomdurchmessern entspricht dies? Wievielen Protonendurchmessern?

Sie sollen als Gutachter LIGO besuchen und fliegen dazu nach Seattle. Die 197 Meilen zum Hanford Research Site fahren Sie in 3 Stunden und 10 Minuten.

c) Was ist die durchschnittliche Reisegeschwindigkeit in km/h?

d) Was ist Ihr Durchschnittsverbrauch in Liter/100 km wenn Sie 11,7 Gallonen Benzin verbraucht haben?

Ihr Fahrzeug hat einen Benzinverbrauch der auf Grund der Luftreibung quadratisch mit der Geschwindigkeit zunimmt, gemäß der Funktion $S = a + bv^2$ mit $a = 0,03$ Liter/km.

e) Bestimmen Sie b und dessen Einheiten.

f) Um wieviel hätten Sie den Benzinverbrauch reduzieren können, wenn Sie die Strecke in 5 Stunden gefahren wären?

g) Sie werden für die Dienstreise bezahlt und sollen die Kosten minimieren. Welche Reisegeschwindigkeit optimiert die Kosten, wenn Sie neben den Benzinkosten (2,48 USD/Gallone) Ihre Fahrzeit mit 20 Euro/Std. ansetzen sollen? Ist das mit der Rechtslage in Washington (speed limit 70 mph) kompatibel?

Relevante Größen: 1 USD = 0,888 Euro, 1 Gallone = 3,785 Liter, 1 Meile = 1,609 km

Aufgabe 3 Statistik

Eine Messung ergibt folgende Werte:

$$x = \{11.9, 11.4, 11.8, 11.4, 12.3, 11.5, 11.2, 11.4, 12.8, 12.1\}$$

Bestimmen Sie den Mittelwert, die mittlere Abweichung, die Standardabweichung und die Standardabweichung des Mittelwerts. Geben Sie die 1σ, 2σ und 3σ Konfidenzintervalle an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei unendlich vielen Messungen einen Messwert innerhalb der jeweiligen Konfidenzintervalle zu finden? Wie groß ist der Anteil an Messwerten von x innerhalb der jeweiligen Konfidenzintervalle?

Aufgabe 4 * Fehlerfortpflanzung

Es sollen Größen y_i aus Messwerten u_i und v_i über die bekannte Funktion $y_i = f(u_i, v_i)$ bestimmt werden. Dazu werden jeweils N Werte u_i und $v_i (i = 1...N)$ gemessen und deren Mittelwerte $\bar{u} = \sum u_i/N$ und $\bar{v} = \sum v_i/N$ sowie deren Varianzen $\sigma_u^2 = \sum(u_i - \bar{u})^2/N$ und $\sigma_v^2 = \sum(v_i - \bar{v})^2/N$ berechnet. Ferner soll angenommen werden, dass die Funktion $f(u, v)$ am Punkt $(\bar{u}, \bar{v})$ nicht zu stark variiert, so dass die folgende Taylorentwicklung für eine Abschätzung der Varianz von y_i ausreichend ist:

$$\begin{aligned}
\sigma_y^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (f(\bar{u}, \bar{v}) - f(u_i, v_j))^2 \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}|_{\bar{u}}(\bar{u} - u_i) + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}|_{\bar{v}}(\bar{v} - v_j)... \right)^2 \\
&\approx \sigma_u^2 \left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right]_{\bar{u}}^2 + \sigma_v^2 \left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right]_{\bar{v}}^2 + 2\sigma_{uv}^2 \left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}|_{\bar{u}} \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}|_{\bar{v}}\right]
\end{aligned}$$

Mit der Kovarianz

$$Cov(u, v) = \sigma_{uv}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} (u_i - \bar{u})(v_j - \bar{v})$$

a) Zeigen Sie, dass gilt $\bar{y} = f(\bar{u}, \bar{v})$. *Tip:* Lesen Sie Demtröder Kap. 1.8.

b) Erklären Sie warum die Kovarianz für statistisch unabhängige Größen u_i und v_i für $N \to \infty$ verschwindet.

c) Erläutern Sie wie man die beschriebene Fehlerfortpflanzung auf mehr als zwei Variablen erweitern kann (ohne Herleitung).

Eine der zentralen Aussagen ist hier, dass statisch unabhängige Fehler quadratisch addiert werden.