11.1.2021

LMU – Fakultät für Physik

9. Übung zur Quantenmechanik (T2p) im WS 20/21

Prof. G. Buchalla

Aufgabe 1: (Kohärente Zustände und klassischer Grenzfall)

Seien a und $a^\dagger$ die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren des harmonischen Oszillators. In dieser Aufgabe untersuchen wir die Zeitabhängigkeit der Eigenzustände des Vernichtungsoperators, der sogenannten *kohärenten* Zustände $|\alpha\rangle$. Die zugehörigen Eigenwerte bezeichnen wir mit α, so dass

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \qquad \alpha \in \mathbb{C}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Lösung der Eigenwertgleichung durch

$$|\alpha\rangle = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle, \qquad A \in \mathbb{C}$$

gegeben ist. Dies entspricht der Entwicklung des Zustands $|\alpha\rangle$ nach den stationären Zuständen $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators, welche $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ mit $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ erfüllen. Normieren Sie anschließend den Zustand $|\alpha\rangle$.

b) Geben Sie eine Interpretation von α. (Hinweis: Betrachten Sie den Erwartungswert des Anzahloperators im Zustand $|\alpha\rangle$.)

c) Berechnen Sie die Warscheinlichkeit, dass ein kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$ aus n Quanten besteht.

d) Verwenden Sie die Zerlegung aus (a), um die Zeitentwicklung des kohärenten Zustands $|\alpha\rangle$ zu berechnen. Zeigen Sie, dass diese in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$|\alpha, t\rangle = e^{-i\omega t/2}\; e^{\alpha(t)a^\dagger - \alpha^*(t)a}\;|0\rangle, \qquad \alpha(t) \equiv \alpha\, e^{-i\omega t}.$$

Hier ist $|0\rangle$ der Grundzustand des harmonischen Oszillators mit der Energie $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

Hinweis: In dieser Aufgabe bietet es sich an mehreren Stellen an, die *Glauber*-Formel zu verwenden. Vergewissern Sie sich jeweils, ob die notwendigen Voraussetzungen dafür erfüllt sind!

e) Nehmen Sie im Folgenden o.B.d.A. an, dass $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Betrachten Sie die Zeitentwicklung des kohärenten Zustands $|\alpha\rangle$ in der Ortsdarstellung. Verwenden Sie dazu die Ortsdarstellung der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und die explizite Form der Wellenfunktion des Grundzustands $\varphi_0(x)$. Zeigen Sie, dass dies auf eine Wellenfunktion $\psi_\alpha(x,t)$ des kohärenten Zustands mit

$$\psi_\alpha(x,t) = (\sqrt{\pi}x_0)^{-1/2}\; \exp\left[-\frac{i}{2}\omega t + \frac{i\alpha^2}{2}\sin(2\omega t) - i\sqrt{2}\alpha\frac{x}{x_0}\sin(\omega t) - \frac{(x - \sqrt{2}\alpha\, x_0\cos(\omega t))^2}{2x_0^2}\right]$$

führt ($x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$).

Hinweis: Die Wirkung des Translationsoperators $T_c \equiv \exp\left(c \, \frac{d}{dx}\right)$ auf eine beliebige Funktion $f(x)$ ist gegeben durch $T_c \, f(x) = f(x + c)$. (Warum?)

f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi_\alpha(x,t)|^2$ und beschreiben Sie deren Form und zeitliche Entwicklung.

g) Betrachten Sie abschließend den klassischen Grenzfall, der formal durch den Limes $\hbar \to 0$ mit $E \equiv \hbar\omega\alpha^2 = const$ (warum?) gegeben ist. Berechnen Sie $|\psi_\alpha(x,t)|^2$ in diesem Grenzfall und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.