21.12.2020

LMU – Fakultät für Physik

8. Übung zur Quantenmechanik (T2p) im WS 20/21

Prof. G. Buchalla

Aufgabe 1: (Kontinuierlicher Potentialtopf)

Gegeben sei das Potential:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m} \frac{1}{\cosh^2(ax)}, \qquad a > 0.$$

Skizzieren Sie das Potential.

a) Normieren und skizzieren Sie den folgenden Zustand:

$$\varphi(x) = \frac{A}{\cosh(ax)}.$$

Zeigen Sie, dass $\varphi(x)$ einen Bindungszustand zum Potential $V(x)$ darstellt und bestimmen Sie dessen Bindungsenergie E.

b) Zeigen Sie, dass die Zustände

$$\psi_k(x) = A' \left(\frac{ik - a\tanh(ax)}{ik + a} \right) e^{ikx}, \qquad k = \sqrt{2mE}/\hbar, \qquad E > 0$$

die Streuzustände zum Potential $V(x)$ darstellen. Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten der Zustände für $x \to \pm\infty$ und bestimmen Sie darüber die Reflexions- und Transmissionswahrscheinlichkeiten $|R|^2$ und $|T|^2$. Überprüfen Sie die Wahrscheinlichkeitserhaltung, d.h. $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

c) Finden Sie alle Bindungsenergien zum Potential $V(x)$, indem Sie die Transmissionsamplitude T für Energien $E < 0$ analytisch fortsetzen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Aufgabenteil (a).

Aufgabe 2: (Matrixelemente)

Seien $|n\rangle$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ die stationären Zustände des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators. Berechnen Sie die folgenden Matrixelemente unter Verwendung der Eigenschaften der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren a und $a^\dagger$:

(a) $\langle 1| \, x^2 \, |3\rangle$, (b) $\langle 1| \, p^2 \, |3\rangle$, (c) $\langle 1| \, x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2} \, |3\rangle$.