23.11.2020

LMU – Fakultät für Physik

4. Übung zur Quantenmechanik (T2p) im WS 20/21

Prof. G. Buchalla

Aufgabe 1: (Entwicklung nach stationären Zuständen)

Gegeben sei ein Teilchen der Masse m in einem Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden ($V(x) = 0$ für $0 \leq x \leq L$, $V(x) = \infty$ sonst).

Erinnerung: Die Lösung der zugehörigen stationären Schrödinger-Gleichung führt für Energien $E > 0$ auf stationäre Zustände der Form $\varphi_n(x) = \sqrt{2/L}\sin(n\pi x/L)$, $n \in \mathbb{N}$. Im Zustand φ_n beträgt die Energie des Teilchens $E_n = \hbar\omega n^2$; mit $\omega = \hbar\pi^2/(2mL^2)$.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das Teilchen im folgenden Zustand:

$$\Psi(x, 0) = Ax(L - x) \qquad , A \in \mathbb{C}.$$

a) Normieren und skizzieren den Zustand $\Psi(x, 0)$. An welchen stationären Zustand erinnert Sie der Verlauf von $\Psi(x, 0)$?

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$ und $\langle H\rangle$ im Zustand $\Psi(x, 0)$, und vergleichen Sie diese mit denjenigen des stationären Zustands aus Aufgabenteil (a).

c) Entwickeln Sie den Zustand (zum Zeitpunkt $t = 0$) nach den stationären Zuständen φ_n, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten c_n in der folgenden Entwicklung:

$$\Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\varphi_n(x).$$

d) Entwickeln Sie zum Abschluss noch eine konstante Funktion $\chi(x, 0) = C$ mit $C \in \mathbb{C}$ nach den stationären Zuständen (Normieren Sie den Zustand vorab und wählen Sie die unbeobachtbare Phase möglichst einfach). Bestimmen Sie die Koeffizienten der Entwicklung. An welchen Punkten ist der Entwicklung, im Vergleich mit dem exakten Wert von $\chi(x, 0)$, am schlechtesten? Warum?

Aufgabe 2: (Zeitentwicklung gemischter Zustände)

Gegeben sei ein Teilchen der Masse m in einem Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden (Notation aus Aufgabe 1). Zum Zeitpunkt $t = 0$ liege das Teilchen in einem aus dem ersten und zweiten stationären Zustand gemischten Zustand vor:

$$\Psi(x,0) = A[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] \quad , \qquad A \in \mathbb{C}.$$

a) Bestimmen Sie die Wellenfunktion zur Zeit t, berechnen Sie deren Betragsquadrat und normieren Sie den Zustand.

b) Zeigen Sie, dass der (zeitabhängige) Erwartungswert $\langle x \rangle(t)$ oszilliert. Bestimmen Sie die Amplitude und die Frequenz der Oszillation.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert des Impulsoperators $\langle p \rangle(t)$.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert des Hamilton-Operators $E' \equiv \langle H \rangle$ und vergleichen Sie diesen mit den Energien E_1 und E_2 der stationären Zustände.

e) Betrachten Sie nun ein *klassisches* Teilchen mit der Energie E', welches im Potentialtopf hin- und herreflektiert wird. Berechnen Sie die Frequenz der klassischen Bewegung und vergleichen Sie diese mit der Frequenz der quantenmechanischen Bewegung aus (b).