25.1.2021

LMU – Fakultät für Physik

11. Übung zur Quantenmechanik (T2p) im WS 20/21

Prof. G. Buchalla

Aufgabe 1: (Harmonischer Oszillator)

Gegeben sei das Potential des isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillators:

$$V(\vec{r}) = \tfrac{1}{2} m\omega^2 \vec{r}^{\,2}.$$

a) Verwenden Sie einen Separationsansatz in kartesischen Koordinaten und zeigen Sie, dass dies auf drei unabhängige eindimensionale harmonische Oszillatoren führt. Bestimmen Sie die Bindungsenergien E_n und deren Entartungsgrad $d(n)$.

b) Wiederholen Sie die Schritte aus a) für den anisotropen harmonischen Oszillator:

$$V(x,y,z) = \tfrac{1}{2} m \big[\omega_1^2 (x^2+y^2) + \omega_2^2 z^2\big].$$

Bestimmen Sie den Entartungsgrad $d(n)$ in diesem Fall.

Aufgabe 2: (Wasserstoffatom)

a) Geben Sie die explizite Form der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms $\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi)$ zur Quantenzahl $n = 2$ an. Wieviele Zustände gibt es? Berechnen Sie $\langle r\rangle$ und $\langle z\rangle$ für jeden Zustand. An welchem Radius würde man ein Teilchen mit der höchsten Wahrscheinlichkeit antreffen?

b) Zeigen Sie, dass der radiale Anteil $R_{nl}(r)$ der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms im Fall $l = n - 1$ die Form

$$R_{n(n-1)}(r) = N_n\, r^{n-1} e^{-r/(na)}$$

annimmt und bestimmen Sie die Normierungskonstante N_n.

Berechnen Sie für die Zustände mit $l = n - 1$ die Erwartungswerte $\langle r\rangle$ und $\langle r^2\rangle$ sowie die radiale Unschärfe $\Delta r = \sqrt{\langle r^2\rangle - \langle r\rangle^2}$. Wie verhält sich die relative radiale Unschärfe $\Delta r/\langle r\rangle$ im Limes $n \to \infty$?

c) Zeigen Sie, dass der Operator $p_r \equiv -i\hbar\,[\partial/\partial r + 1/r]$ hermitesch ist, die radiale Projektion des Impulsoperators $\tilde{p}_r \equiv \vec{p}\cdot\vec{e}_r = -i\hbar\,\partial/\partial r$ hingegen nicht. Berechnen Sie die Kommutatoren $[r, p_r]$ und $[r, \tilde{p}_r]$. Berechnen Sie schließlich den Ausdruck $\Delta r \Delta p_r$ für den Grundzustand des Wasserstoffatoms ψ_{100}.