2.11.2020

LMU – Fakultät für Physik

1. Übung zur Quantenmechanik (T2p) im WS 20/21

Prof. G. Buchalla

Aufgabe 1: (Lineare Algebra)

Wir bezeichnen die Basisvektoren eines Vektorraums V mit dem Symbol $|n\rangle$, $n = 1, \ldots, \dim(V)$; die konjugierten Basisvektoren mit $\langle n|$. Das Skalarprodukt zweier Vektoren wird in dieser Notation mit $\langle u|v\rangle$ bezeichnet, insbesondere gilt also für die orthonormierten Basisvektoren $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$. Eine Matrix A wird *hermitesch* genannt, falls $A = A^\dagger$; eine Matrix U wird *unitär* genannt, falls $U^{-1} = U^\dagger$. Die *Spur* einer Matrix ist die Summe über ihre Diagonalelemente, d.h. $\mathrm{Tr}(A) = \sum_n \langle n|A|n\rangle$.

a) Zeigen Sie die Zerlegung der Eins, d.h. $\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbf{1}$, wobei $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix ist.

b) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte einer hermiteschen Matrix reell sind und dass Eigenvektoren $|\lambda\rangle$, $|\lambda'\rangle$ zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda \neq \lambda'$ orthogonal sind.

c) Zeigen Sie, dass $(e^{iA})^\dagger = e^{-iA^\dagger}$ und dass für B hermitesch e^{iB} unitär ist. Beachten Sie dabei, dass das Exponential einer Matrix über ihre Exponentialreihe definiert wird, also $e^A = 1 + A + A^2/2 + \ldots$.

d) Zeigen Sie, dass die Spur einer beliebigen Matrix invariant unter unitären Transformationen ist und dass die Spur eine lineare Abbildung ist.

e) Zeigen Sie $\mathrm{Tr}(A_1 A_2 \cdots A_{k-1} A_k) = \mathrm{Tr}(A_k A_1 A_2 \cdots A_{k-1})$, d.h. unter der Spur darf zyklisch vertauscht werden.

f) Zeigen Sie für eine hermitesche Matrix, dass die Spur die Summe der Eigenwerte und die Determinante das Produkt der Eigenwerte ist. Zeigen Sie anschließend die Relation $\mathrm{Det}(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.

Aufgabe 2: (Kommutatoren)

Für zwei Matrizen A, B gleicher Dimension definieren wir den *Kommutator* als

$$[A, B] := AB - BA,$$

und den *Antikommutator* als

$$\{A, B\} := AB + BA.$$

a) Zeigen Sie $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

b) Zeigen Sie $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (*Jacobi-Identität*).

c) Zeigen Sie $[A, B]^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger]$ und $\{A, B\}^\dagger = \{A^\dagger, B^\dagger\}$.

d) Zeigen Sie für hermitesche Matrizen A und B, dass $i[A, B]$ ebenfalls hermitesch und $i\{A, B\}$ dagegen antihermitesch (d.h. $A^\dagger = -A$) ist.

e) Sei $F(B)$ ein Polynom in B; die Ableitung nach B ist gegeben durch $(B^n)' = nB^{n-1}$. Nehmen Sie an, dass $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ und zeigen Sie, dass

$$[A, F(B)] = [A, B]F'(B).$$

f) Man definiert die Ableitung einer Matrix A, die von einem Parameter t abhängt, über

$$\frac{dA(t_0)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t_0 + \Delta t) - A(t_0)}{\Delta t}.$$

Man kann zeigen, dass

$$\frac{d}{dt}(A + B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt} \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}.$$

Berechnen Sie für konstante A und B

$$\frac{d}{dt}e^{At} \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt}(e^{At}e^{Bt}).$$

g) Zeigen Sie mit Hilfe von $\frac{d}{dt}(e^{At}e^{Bt})$ und einer daraus abgeleiteten Differentialgleichung die *Glauber-Formel*

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]},$$

unter der Voraussetzung, dass $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$.

h) Zeigen Sie die *Baker-Hausdorff-Formel*:

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \dots.$$

Zeigen Sie dazu, dass $B(t) = e^{At}Be^{-At}$ die Integralgleichung

$$B(t) = B + \int_0^t d\tau [A, B(\tau)]$$

löst, und iterieren Sie diese.