PN1
Besprechung der 7. Vorlesung

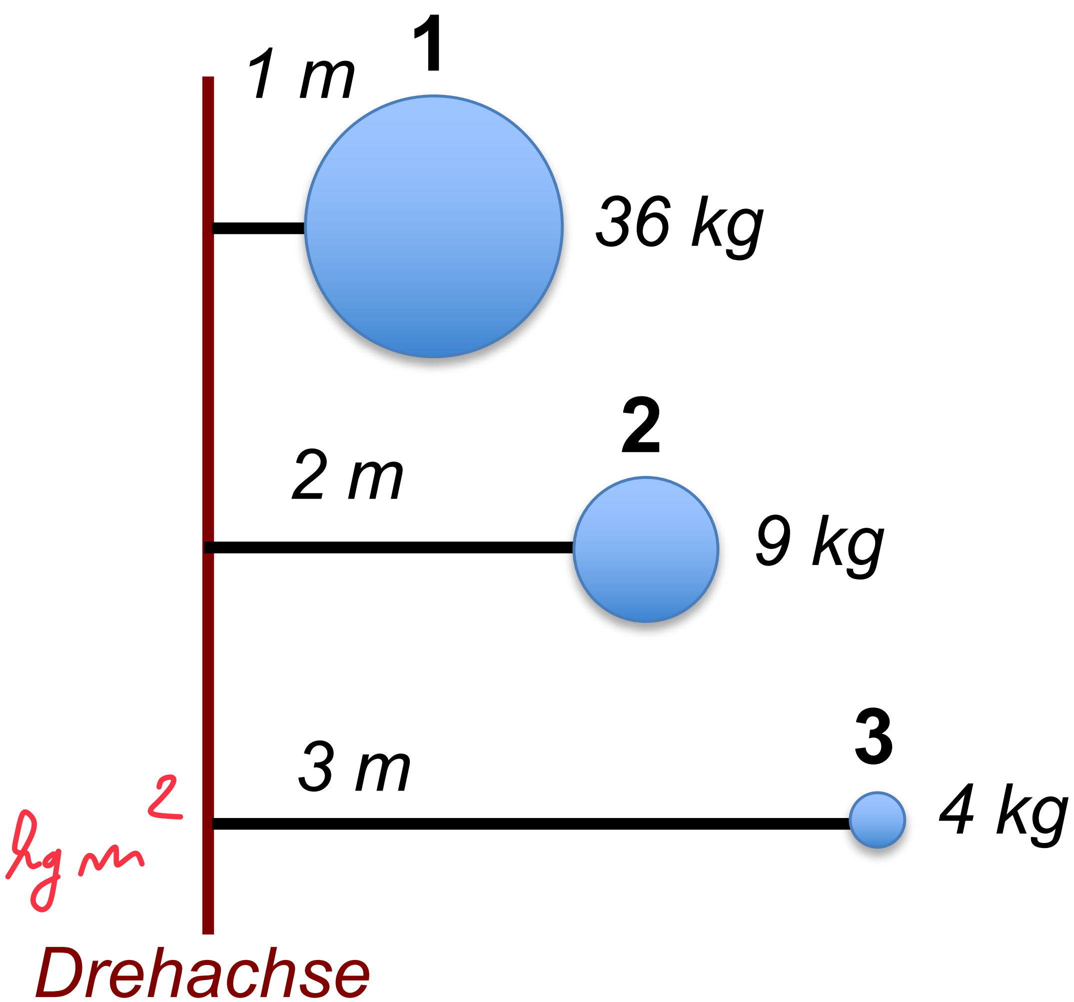
14.12.2020

Prof. Dr. Jan Lipfert und Prof. Dr. Ralf Jungmann

WS 2020/2021

Einstiegsfrage

Die Skizze zeigt drei Kugeln (1, 2, 3), die sich um eine senkrechte Achse drehen. Ordnen Sie die Kugeln nach ihrem Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse, beginnend mit dem größten Wert



(A) 1 > 2 > 3

(B) 3 > 2 > 1

(C) 2 > 1 > 3

✓ (D) 1 = 2 = 3

$I_1 = m_1 r_1^2 = 36\,kg \cdot (1\,m)^2 = 36\,kg\,m^2$

$I_2 = m_2 r_2^2 = 9\,kg \cdot (2\,m)^2 = 36\,kg\,m^2$

$I_3 = m_3 r_3^2 = 4\,kg\ (3\,m)^2 = 36\,kg\,m^2$

Wiederholungen

Bewegungen: Translation + Rotation $\Rightarrow$ „alles" kann beschrieben werden

$$d\vec{r} = d\vec{\phi} \times \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

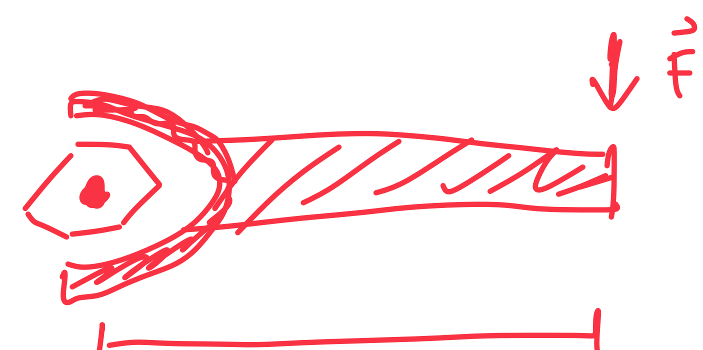
$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2} \times \vec{r} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

↳ Winkelbeschl.

$\Rightarrow$ **Bewegungsgleichung:** $\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

$\vec{a} \times \vec{b}$: Kreuzprodukt : $|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$

Drehmoment: $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$



$\Rightarrow \vec{T} = l \cdot F = 0{,}5\,m \cdot 1000\,N = 500\,Nm$

l

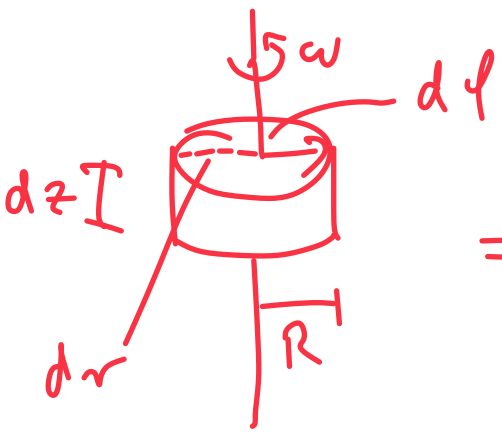
Berechnung I:

·) Scheibe:

$$I = \int r^2 \underbrace{\rho \cdot dV}_{\hat{=}\, dm}$$

$$E_{kin,rot} = \frac{1}{2} \sum_i dm_i v_i^2$$

$$\frac{1}{2}\omega^2 \sum_i dm_i r_i^2$$



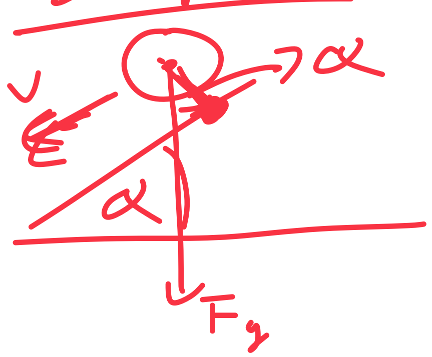
$$\Rightarrow I = \int_0^R \int_0^h \int_0^{2\pi} \rho r^2 \, d\varphi \, dz \, r \cdot dr$$

↳ Zylinderkoordinaten

$$= \rho \cdot 2\pi \cdot h \cdot \frac{1}{4} R^4 \underset{\rho \cdot V}{=} \frac{1}{2} M R^2$$

$$\boxed{V = \pi R^2 \cdot h}$$

Beispiel: Rollender Zylinder



$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$T = R \cdot M \cdot g \cdot \sin\alpha$$

Trägheitsmoment:

$$\boxed{I = I_S + M R^2}$$

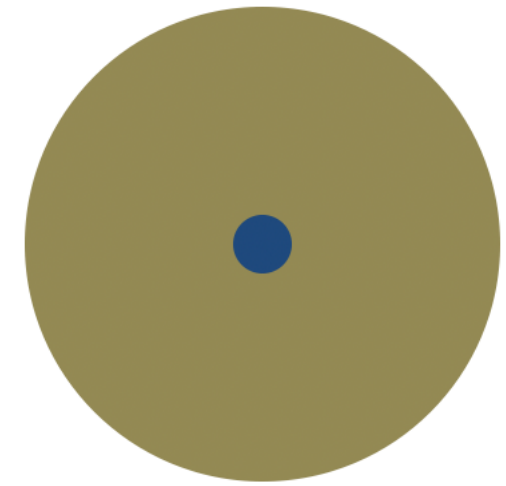
$$\hookrightarrow = \frac{1}{2} M R^2$$

$$T = I \cdot \ddot{\varphi} \Leftrightarrow R \cdot M \cdot g \cdot \sin\alpha = (I_S + M R^2) \cdot \ddot{\varphi}$$

$$s = R \cdot \varphi \Rightarrow \ddot{s} = R \cdot \ddot{\varphi}$$

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = R \cdot \frac{M \cdot g \, R \cdot \sin\alpha}{I_S + M R^2} = \frac{g \cdot \sin\alpha}{1 + I_S / M R^2}$$

Wiederholung: Drehbewegungen



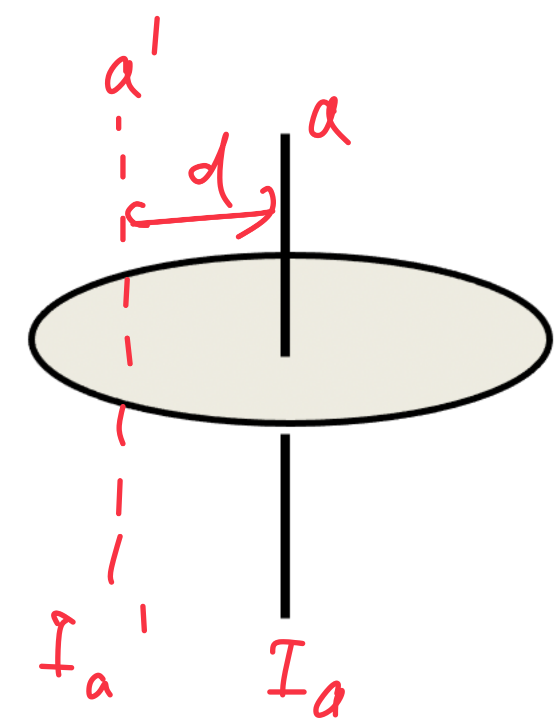
Die Bewegung eines **starren Körpers** lässt sich aus **Translation** und **Rotation** zusammensetzten

Bewegungsgleichungen für Drehbewegung: Winkel, Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung

$$d\vec{\phi} \;;\; \vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} \;;\; \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2}$$

Trägheitsmoment

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 \, dm = \int \rho \, r^2 \, dV$$



Steinerscher Satz

$$I_{a'} = I_a + M a^2$$

Rotationsenergie

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Wiederholung: Linear- vs. Drehbewegungen

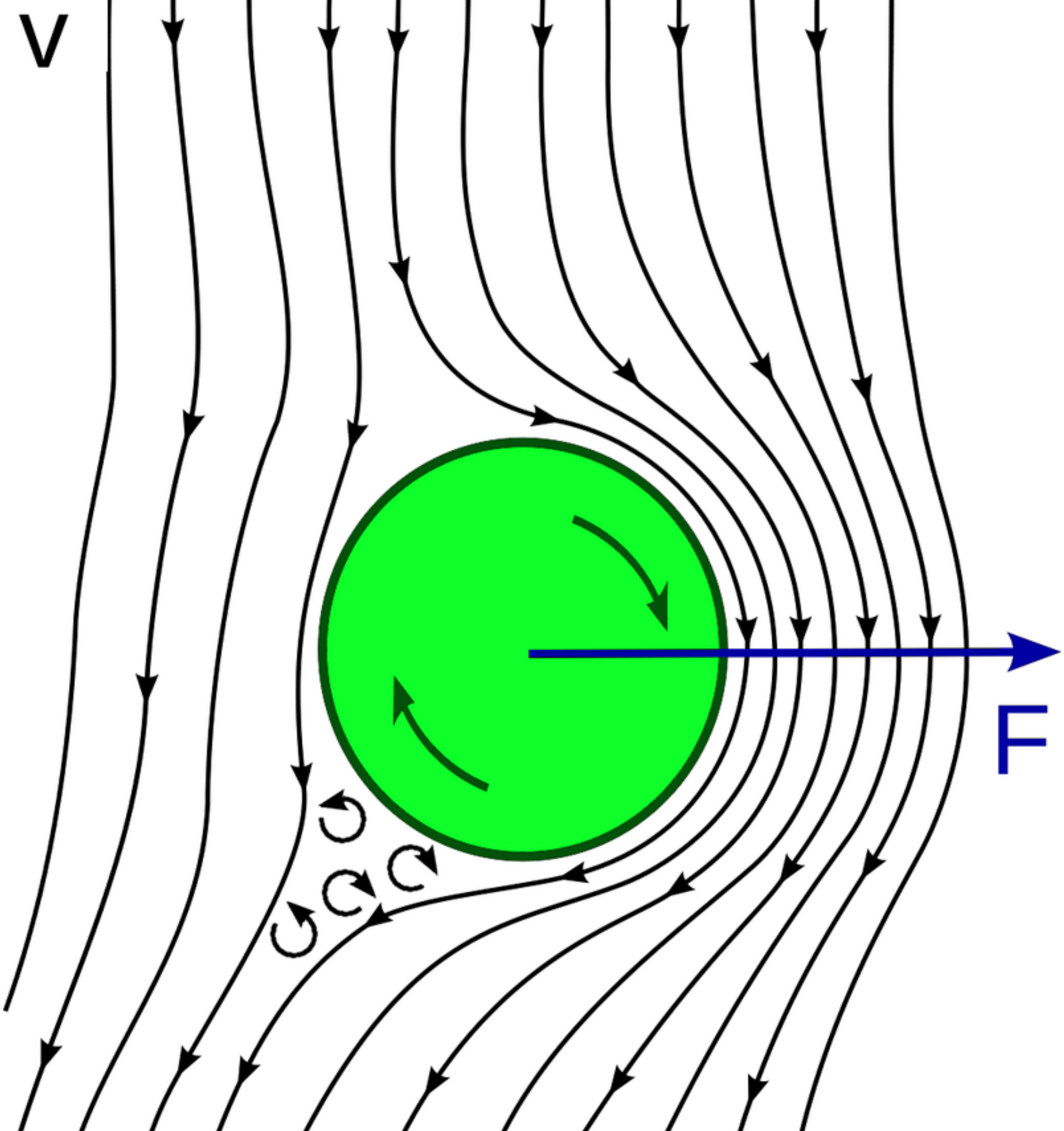
http://sportsnscience.utah.edu/2012/09/04/skiing-friction-basic/

http://de.wulffplag.wikia.com/wiki/Datei:Kettenkarussell.jpg

$\boxed{\text{Analogie}}$, nicht gleiche Einheiten !!!

$\vec{r}$	Weg, Verschiebung	Drehwinkel	$\vec{\phi}$
$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	Geschwindigkeit	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}}$
$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$	Beschleunigung	Winkelbeschleunigung	$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\phi}}$
m	Masse	Trägheitsmoment	I
$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Impuls	Drehimpuls	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I \cdot \omega$
$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	Kraft	Drehmoment	$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} = \dot{\vec{L}}$
$\frac{1}{2} m v^2$	Kinetische Energie	Rotationsenergie	$\frac{1}{2} I \omega^2$

https://de.wikipedia.org/wiki/Flettner-Rotor#/media/Datei:E-Ship_1_(20037221244).jpg



https://de.wikipedia.org/wiki/Magnus-Effekt#/media/Datei:Magnus_effect_Strömung.png