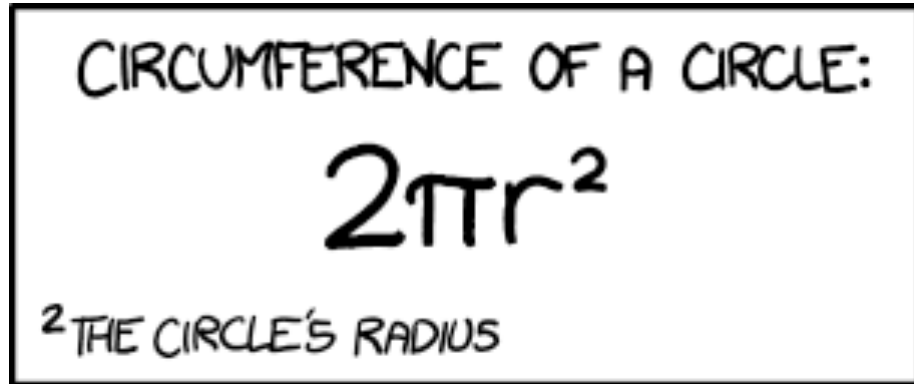


# Drehbewegungen

Physik 1 für Chemiker und Biologen

7. Vorlesung



<https://xkcd.com/1184/>

Heute: Drehbewegungen

- Trägheitsmoment
- Drehimpuls
- Drehmoment

Prof. Dr. Ralf Jungmann

[Jungmann@physik.lmu.de](mailto:Jungmann@physik.lmu.de)

Prof. Dr. Jan Lipfert

[Jan.Lipfert@lmu.de](mailto:Jan.Lipfert@lmu.de)

# Drehbewegungen

*Bisher:* „**Massepunkt**“ = idealisierter Körper, bei dem alle Masse als im Schwerpunkt konzentriert genähert wird.

*Jetzt:* „**starrer Körper**“ = Körper mit Ausdehnung (diskrete Massepunkte oder kontinuierlich), der als **nicht verformbar** genähert wird.



<https://de.wikipedia.org/wiki/B%C3%BCrostuhl>

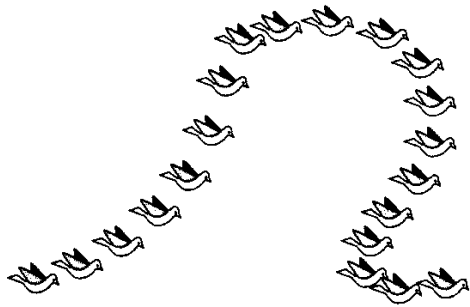
Experiment:  
Rotation auf Drehstuhl



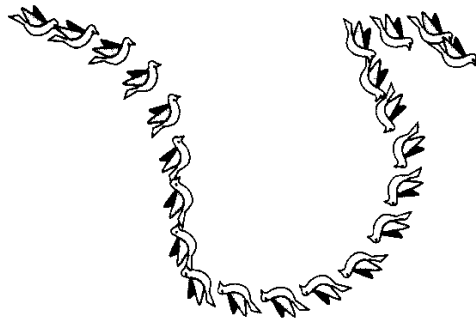
[https://de.wikipedia.org/wiki/Kim\\_Yuna](https://de.wikipedia.org/wiki/Kim_Yuna)

# Drehbewegungen

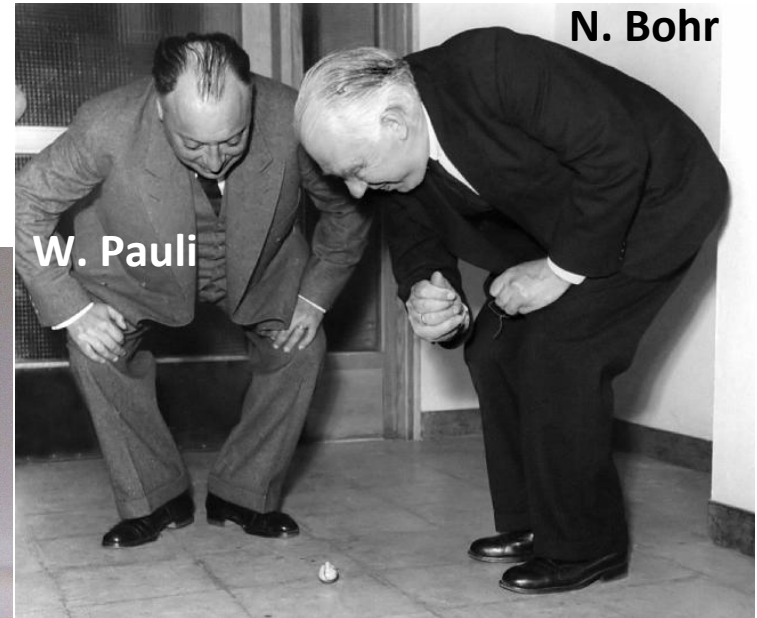
Die Bewegung eines **starrten Körpers** lässt sich aus **Translation** und **Rotation** zusammensetzen.



(Auf der Stelle)



<https://de.wikipedia.org/wiki/Kreisel>



W. Pauli

N. Bohr

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pauli\\_wolfgang\\_c4.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pauli_wolfgang_c4.jpg)

# Lineare vs. Drehbewegungen

Zu jeder Größe der linearen Bewegung gibt es eine korrespondierende Größe der Drehbewegung. Die Gleichungen für beide Bewegungsformen sind formal gleich!



<http://sportsnsience.utah.edu/2012/09/04/skiing-friction-basic/>

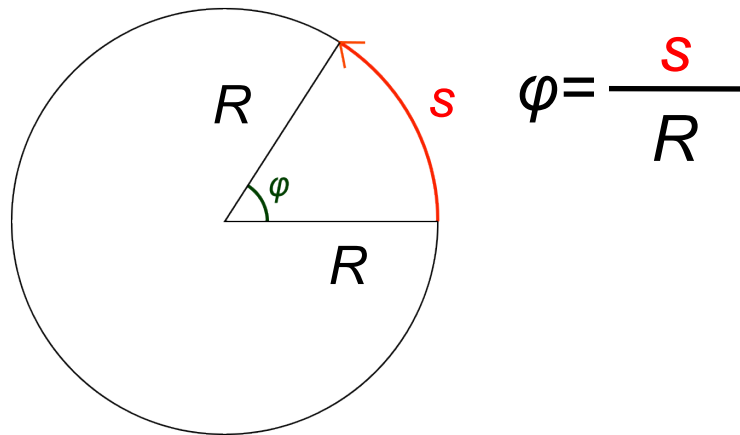


<http://de.wulffplag.wikia.com/wiki/Datei:Kettenkarussell.jpg>

Weg, Verschiebung	Drehwinkel
Geschwindigkeit	Winkelgeschwindigkeit
Beschleunigung	Winkelbeschleunigung
Masse	Trägheitsmoment
Impuls	Drehimpuls
Kraft	Drehmoment
Kinetische Energie	Rotationsenergie

# Bemerkungen zu Winkeln

- Die „natürliche“ Einheit für Winkel ist das Bogenmaß, in *rad*

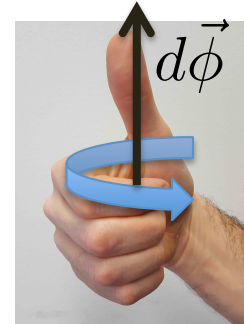


UMRECHNUNG:

$$2\pi \text{ rad} = 1 \text{ Umdrehung} = 360^\circ$$

Drehung als Vektor:

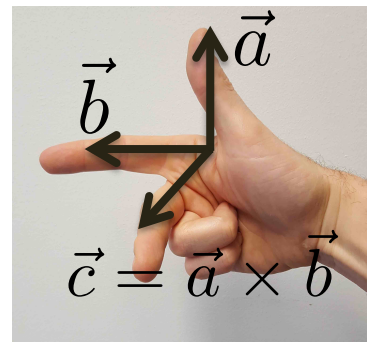
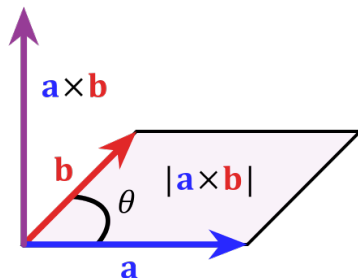
$$d\vec{\phi}$$



- Zur Erinnerung: „Kreuzprodukt“ von Vektoren:  $\vec{a} \times \vec{b}$

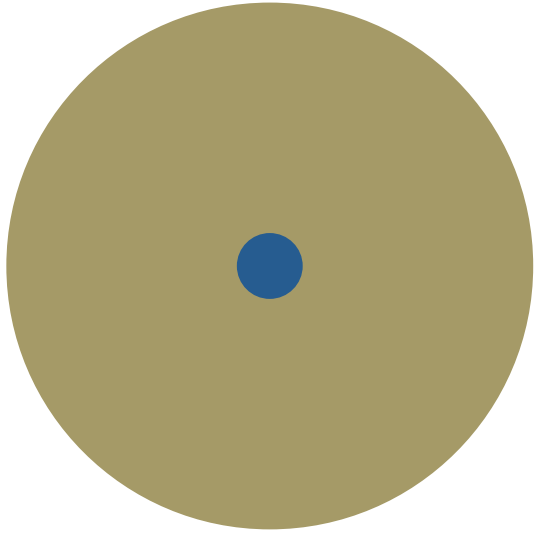
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$



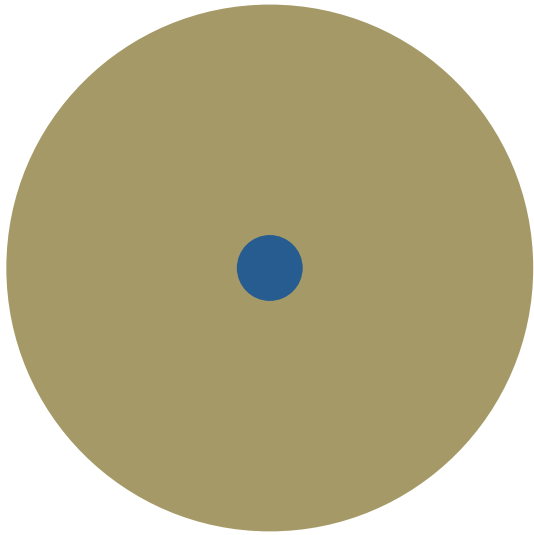
„Rechte Hand Regel“

# Bewegungsgleichungen für Rotation



- Infinitesimale Drehung
- Winkelgeschwindigkeit
- Winkelbeschleunigung

# Kinetische Energie eines rotierenden Körpers



Trägheitsmoment  $I$

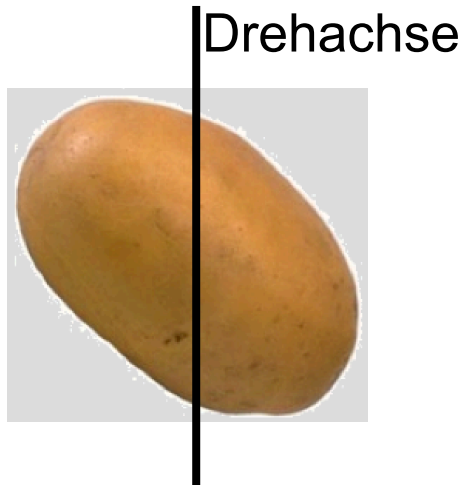
# Trägheitsmomente ausgedehnter Körper

Das Trägheitsmoment  $I$  hängt ab von:

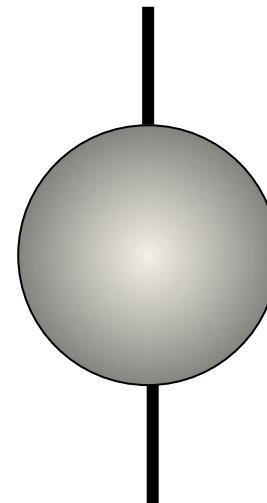
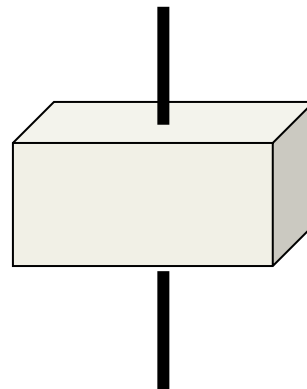
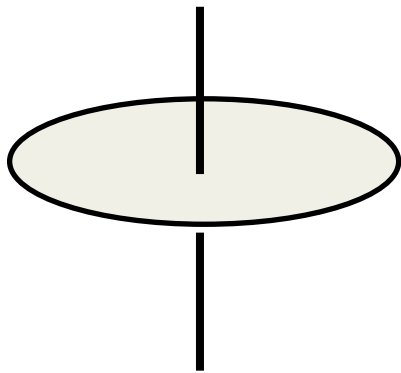
- Masse des Körpers
- Form
- Lage der Achse

$I$  ist die „Masse“ der Drehbewegung

$I$  ist oft ein **Tensor**



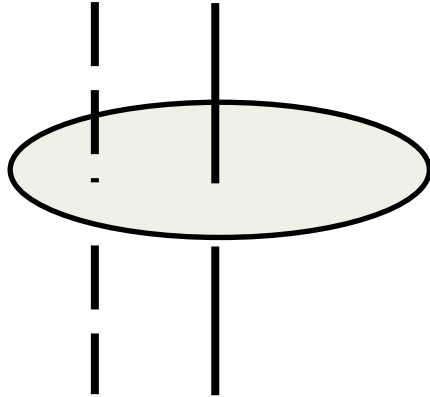
**Beispiele:**





# Steinerscher Satz (Theorem paralleler Achsen)

$a$ : Achse durch den Schwerpunkt



$a'$ : Achse parallel zu  $a$ , *nicht* durch den Schwerpunkt

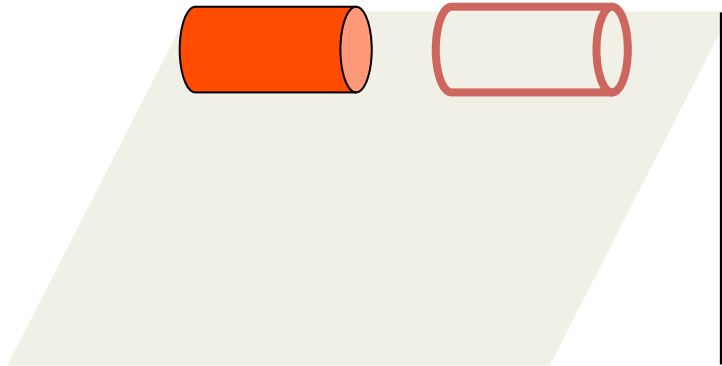


[https://de.wikipedia.org/wiki/  
Jakob\\_Steiner](https://de.wikipedia.org/wiki/Jakob_Steiner)

Jakob Steiner  
(1796-1863)

# Wettrennen auf der schiefen Ebene

Experiment: Voll-, Hohlzylinder auf schiefer Ebene

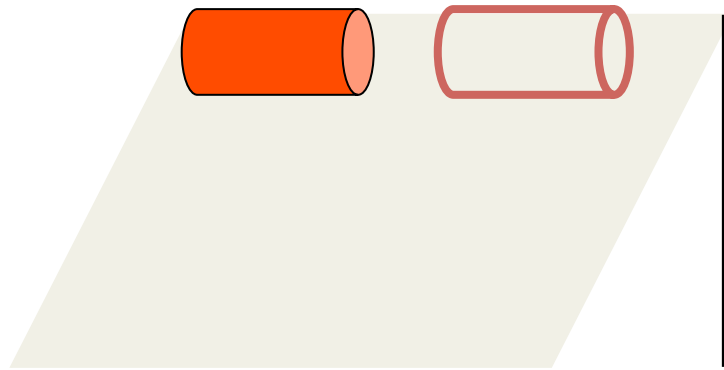


Voll- und Hohlzylinder mit gleicher Masse  $m$  und gleichem Radius  $R$  rollen schiefe Ebene hinunter.

**Welcher Zylinder ist schneller unten?**

- A) Der Vollzylinder.
- B) Der Hohlzylinder.
- C) Beide kommen gleichzeitig unten an.

# Lösungsansatz: In der Drehung steckt Energie!



Voll- und Hohlzylinder mit gleicher Masse  $m$  und gleichem Radius  $R$  rollen schiefe Ebene hinunter.

$$I_{\text{voll}}$$

$$I_{\text{hohl}}$$

Oben:

Annahme: Keine Reibung (d.h. Energieerhaltung)

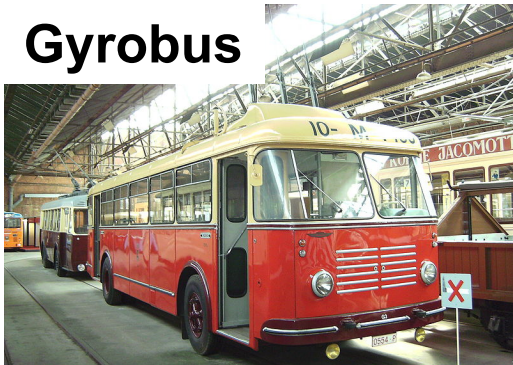
Unten:

# Schwungräder als Energiespeicher



<https://de.wikipedia.org/wiki/Gotthardpass>

## Gyrobüs

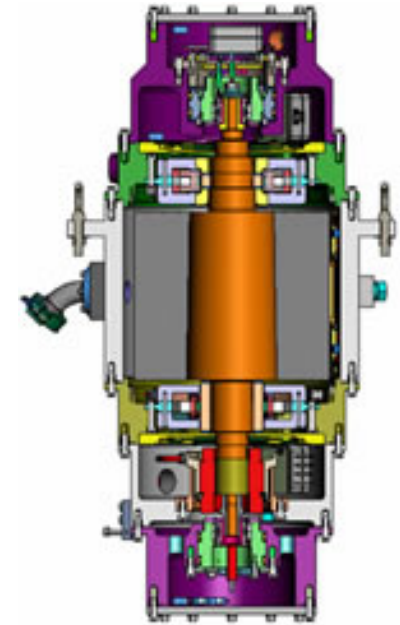


<https://de.wikipedia.org/wiki/Gyrobüs>

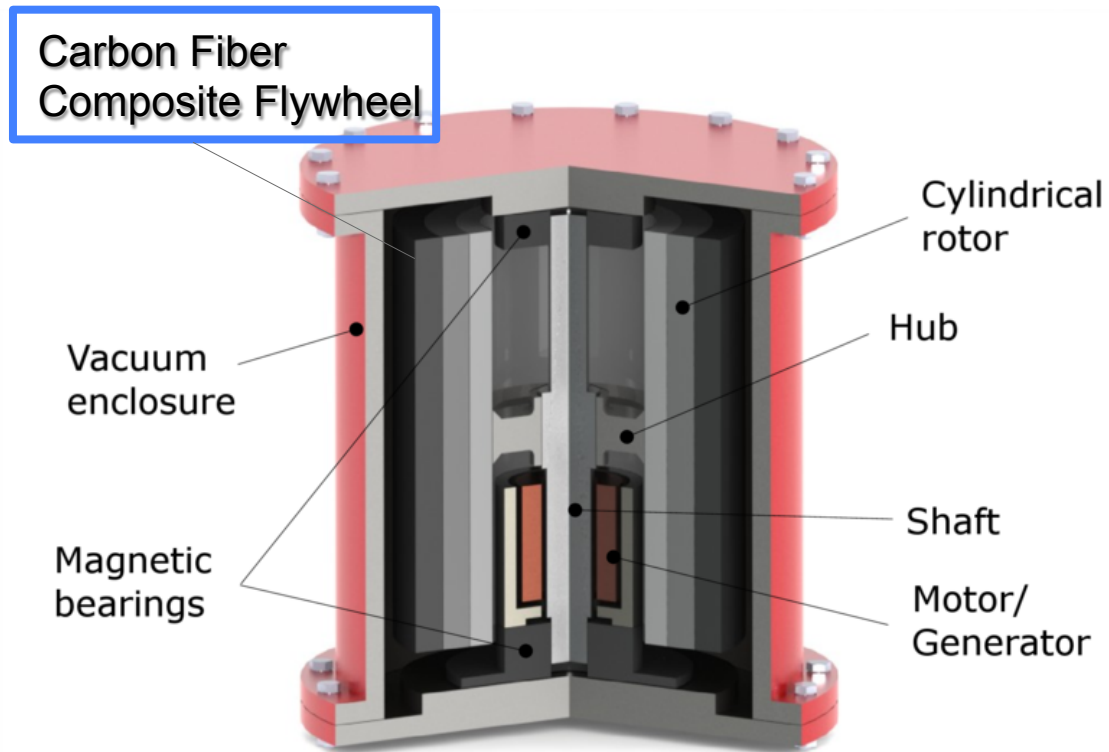
14.12.20

# Schwungräder als Energiespeicher

- Drehung mit bis zu 80 000 rpm
- $E_{rot} \sim 350 \text{ kWh} \sim 10^9 \text{ J}$
- Vakuum um Verluste durch Luftreibung zu minimieren
- Anwendung: schnelle Notstromversorgung



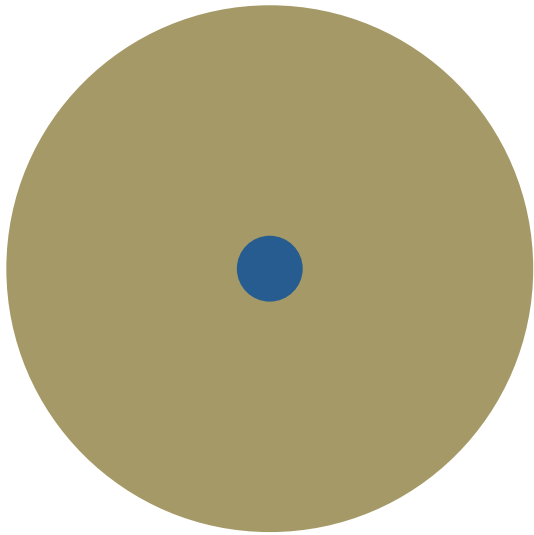
<https://de.wikipedia.org/wiki/Schwungrad>



<https://de.wikipedia.org/wiki/Schwungrad>

# Das Drehmoment

Drehmomente verursachen eine Änderung der Drehbewegung



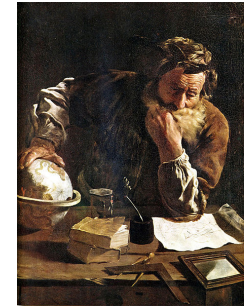
# Gleichgewichtsbedingung des starren Körpers

- Translation:

Erinnerung:  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

- Rotation:

Hebelgesetz:



<https://de.wikipedia.org/wiki/Zahl>

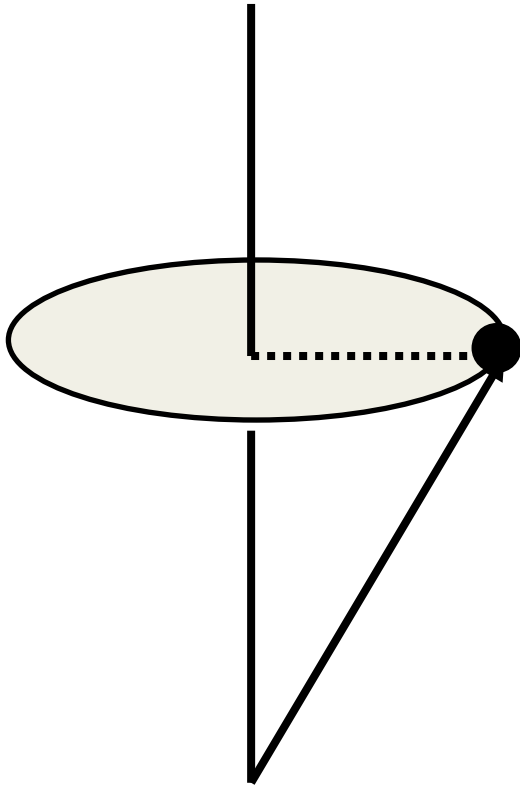
Archimedes  
von Syrakus  
(287-212 v. Chr.)

Experiment: Drehmomentscheibe

# Drehimpuls

Definition Drehimpuls  
(für Massepunkt):

$$\vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$





# Änderung des Drehimpuls $\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$

- Wenn keine äußeren Drehmomente wirken, bleibt der Gesamtdrehimpuls konstant!
- Wenn äußere Drehmomente wirken, ändern sie den Gesamtdrehimpuls gemäß:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{T}_{Gesamt}$$

# Anwendungen der Drehimpulserhaltung

- Betrag des Drehimpulses:

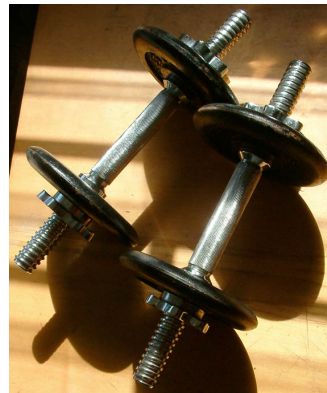
$$|\vec{L}| = mr^2\omega = I\omega$$

- Der Drehimpuls in einem abgeschlossen System ist konstant!

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i(t) = \text{const.}$$



<https://de.wikipedia.org/wiki/B%C3%BCrostuhl>



<https://en.wikipedia.org/wiki/Dumbbell#/media/File:TwoDumbbells.JPG>

Experiment: Drehstuhl mit Hanteln

# Kreisel auf Drehstuhl



Ein furchtloser Freiwilliger setzt sich auf einen (ruhenden) Drehstuhl. Er hält einen Kreisel, der sich im Uhrzeigersinn um eine vertikale Drehachse dreht. Jetzt dreht er den Kreisel um  $90^\circ$ , so dass er sich um eine horizontale Achse dreht.

<https://de.wikipedia.org/wiki/B%C3%BCrostuhl>

Experiment: Drehstuhl mit Felge

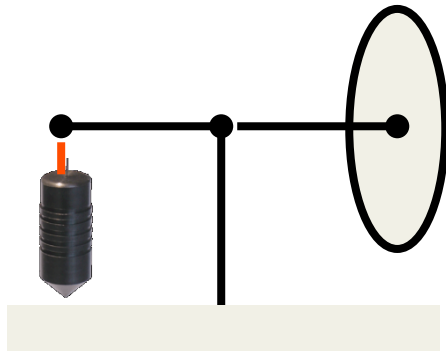
**Was passiert mit dem Freiwilligen auf dem Drehstuhl?**

- A) Er bleibt in Ruhe.
- B) Er beginnt sich im Uhrzeigersinn zu drehen.
- C) Er beginnt sich gegen den Uhrzeigersinn zu drehen.

# Anwendungen des Drehimpulssatzes: Präzession des Kreisels

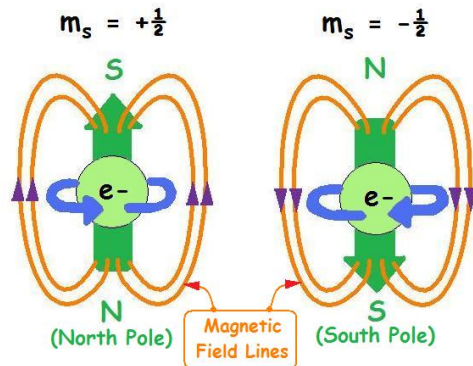
$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{T}_{\text{Gesamt}}$$

*Die Richtung der Drehimpulsänderung steht senkrecht zur Kraft bzw. zum Drehmoment!*



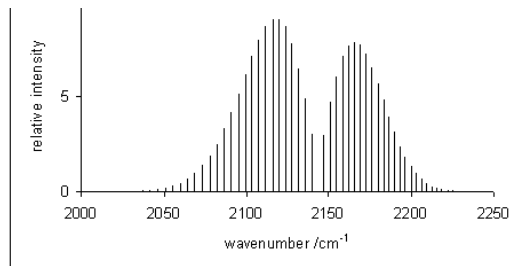
Experiment: Kreisel

# Drehbewegungen in Molekülen und Atomen



[http://chemwiki.ucdavis.edu/Physical\\_Chemistry/Quantum\\_Mechanics/09\\_The\\_Hydrogen\\_Atom/Atomic\\_Theory/Atoms\\_in\\_Atoms/Electron\\_Spin](http://chemwiki.ucdavis.edu/Physical_Chemistry/Quantum_Mechanics/09_The_Hydrogen_Atom/Atomic_Theory/Atoms_in_Atoms/Electron_Spin)

## Vibration-Rotation-Spektrum von CO



[https://en.wikipedia.org/wiki/Rotational\\_vibrational\\_spectroscopy](https://en.wikipedia.org/wiki/Rotational_vibrational_spectroscopy)

Elektronen und viele Atomkerne haben einen besonderen Drehimpuls - den **Spin**  
Grundlage für ESR, NMR, MRI-Bildgebung



[https://en.wikipedia.org/wiki/Microwave\\_oven](https://en.wikipedia.org/wiki/Microwave_oven)

Wassermoleküle werden im **Mikrowellenherd** zu (gehinderten) Rotationen angeregt.

## Rotations-Spektroskopie

Gasmoleküle mit elektrischem Dipolmoment können zur Rotation angeregt werden. Aus den Spektren kann z.B. auf die Bindungslängen geschlossen werden.

# Wiederholung: Drehbewegungen

- Die Bewegung eines **starrten Körpers** lässt sich aus **Translation** und **Rotation** zusammensetzen
- Bewegungsgleichungen für Drehbewegung:  
Winkel, Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung

$$d\vec{\phi} \quad \vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2}$$

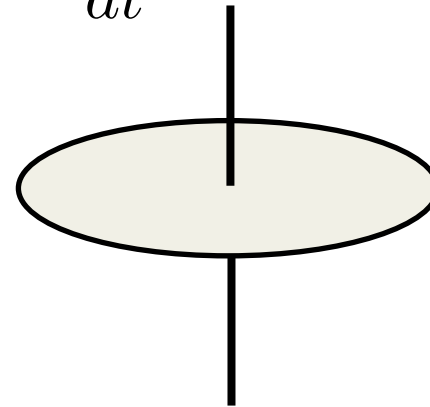
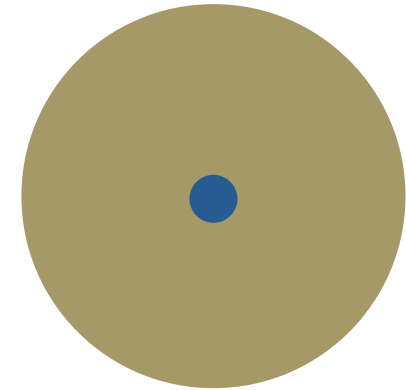
- **Trägheitsmoment:**

**Einheit:**  
[I] = kg·m<sup>2</sup>

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV$$

- **Steinerscher Satz:**  $I_{a'} = I_a + Md^2$   
(über parallele Achsen)

- **Rotationsenergie:**  $E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$



# Zusammenfassung: Drehmoment und Drehimpuls

- **Drehmoment:**  $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$

**Einheit:**

$$[T] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2 = \text{J}$$

$$\vec{T} = |\vec{r}| F_{\text{tangential}}$$

- **Drehimpuls:**  $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p}$

**Einheit:**

$$[L] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s} = \text{J} \cdot \text{s}$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = I \vec{\omega}$$

- Wenn keine äußeren Drehmomente wirken, bleibt der Gesamtdrehimpuls konstant!
- Wenn äußere Drehmomente wirken, ändern sie den Gesamtdrehimpuls gemäß:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{T}_{\text{Gesamt}}$$

# Lineare vs. Drehbewegungen

Zu jeder Größe der linearen Bewegung gibt es eine korrespondierende Größe der Drehbewegung. Die Gleichungen für beide Bewegungsformen sind formal gleich!



<http://sportsnsience.utah.edu/2012/09/04/skiing-friction-basic/>



<http://de.wulffplag.wikia.com/wiki/Datei:Kettenkarussell.jpg>

Weg, Verschiebung	Drehwinkel
Geschwindigkeit	Winkelgeschwindigkeit
Beschleunigung	Winkelbeschleunigung
Masse	Trägheitsmoment
Impuls	Drehimpuls
Kraft	Drehmoment
Kinetische Energie	Rotationsenergie