

Wer misst misst Mist!

Physik 1 für Chemiker und Biologen 2. Vorlesung

WHAT THE NUMBER OF DIGITS IN YOUR COORDINATES MEANS

LAT/LON PRECISION	MEANING
28°N, 80°W	YOU'RE PROBABLY DOING SOMETHING SPACE-RELATED
28.5°N, 80.6°W	YOU'RE POINTING OUT A SPECIFIC CITY
28.52°N, 80.68°W	YOU'RE POINTING OUT A NEIGHBORHOOD
28.523°N, 80.683°W	YOU'RE POINTING OUT A SPECIFIC SUBURBAN CUL-DE-SAC
28.5234°N, 80.6830°W	YOU'RE POINTING TO A PARTICULAR CORNER OF A HOUSE
28.52345°N, 80.68309°W	YOU'RE POINTING TO A SPECIFIC PERSON IN A ROOM, BUT SINCE YOU DIDN'T INCLUDE DATUM INFORMATION, WE CAN'T TELL WHO
28.5234571°N, 80.6830941°W	YOU'RE POINTING TO WALDO ON A PAGE
28.523457182°N, 80.683094159°W	"HEY, CHECK OUT THIS SPECIFIC SAND GRAIN!"
28.523457182818284°N, 80.683094159265358°W	EITHER YOU'RE HANDING OUT RAW FLOATING POINT VARIABLES, OR YOU'VE BUILT A DATABASE TO TRACK INDIVIDUAL ATOMS. IN EITHER CASE, PLEASE STOP.

<https://xkcd.com/2170/>

Heute:

- Messen und Messfehler
- Fehlerfortpflanzung
- Einheiten: Zeit, Länge, Masse
- Umrechnung von Einheiten

Prof. Dr. Ralf Jungmann

Jungmann@physik.lmu.de

Prof. Dr. Jan Lipfert

Jan.Lipfert@lmu.de

Messungen sind zentral in der Physik!

Physik ist eine empirische Wissenschaft. Experimentelle Ergebnisse entscheiden, ob Theorien Bestand haben oder verworfen werden müssen.



https://de.wikipedia.org/wiki/Hermann_von_Helmholtz

Hermann von Helmholtz
(1821-1894)

„Zählen und Messen ist die Grundlage der fruchtbarsten, sichersten und genauesten wissenschaftlichen Methoden“



https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Kamerlingh_portret.jpg

Heike Kamerlingh Onnes
Nobelpreis 1913
(1853-1926)

*„Door meten tot weten“
(„Durch Messen zum Wissen“)*

**Experiment:
Messung der Körperlänge**

Arten von Messfehler

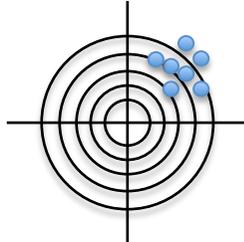
Bei Messungen immer berücksichtigen:

- **Einheiten**
- **Messfehler** (= Messabweichung) und Messgenauigkeit

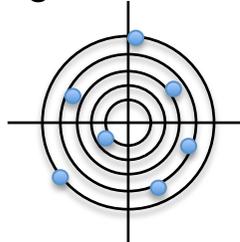
Systematische Fehler (= systematische Abweichungen) sind einseitig gerichtet und durch im Prinzip feststellbare Ursachen bedingt. Lassen sich nicht durch wiederholte Messungen eliminieren.

Statistische Fehler (= zufällige Abweichungen) streuen in Betrag und Vorzeichen. Lassen sich durch wiederholte Messungen reduzieren.

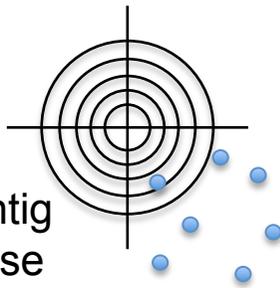
Präzise, aber nicht richtig



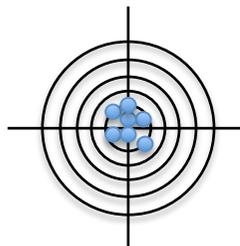
Richtig, aber nicht präzise



Weder richtig
noch präzise

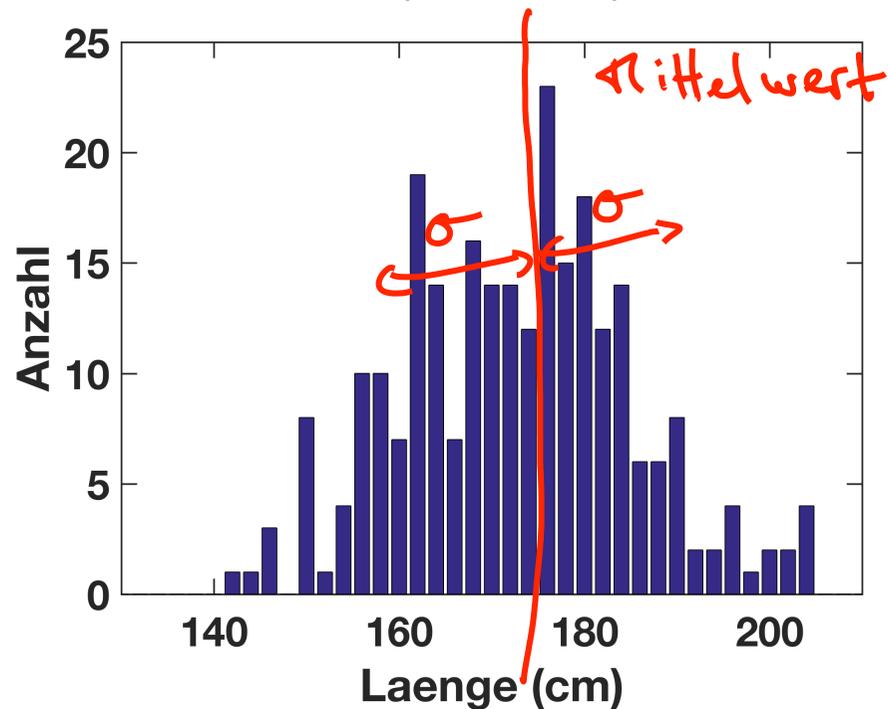


Richtig und präzise



Wichtige Begriffe aus der Statistik

Verteilung der Körperlänge aller
PN1 Studierenden (simuliert):



Stichprobenfehler
„standard error of the mean“
(hier: 0,77 cm)

$$\sigma_{SEM} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Mittelwert
(hier: 173 cm)

$$\langle x \rangle = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Standardabweichung
(hier: 12,5 cm)

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

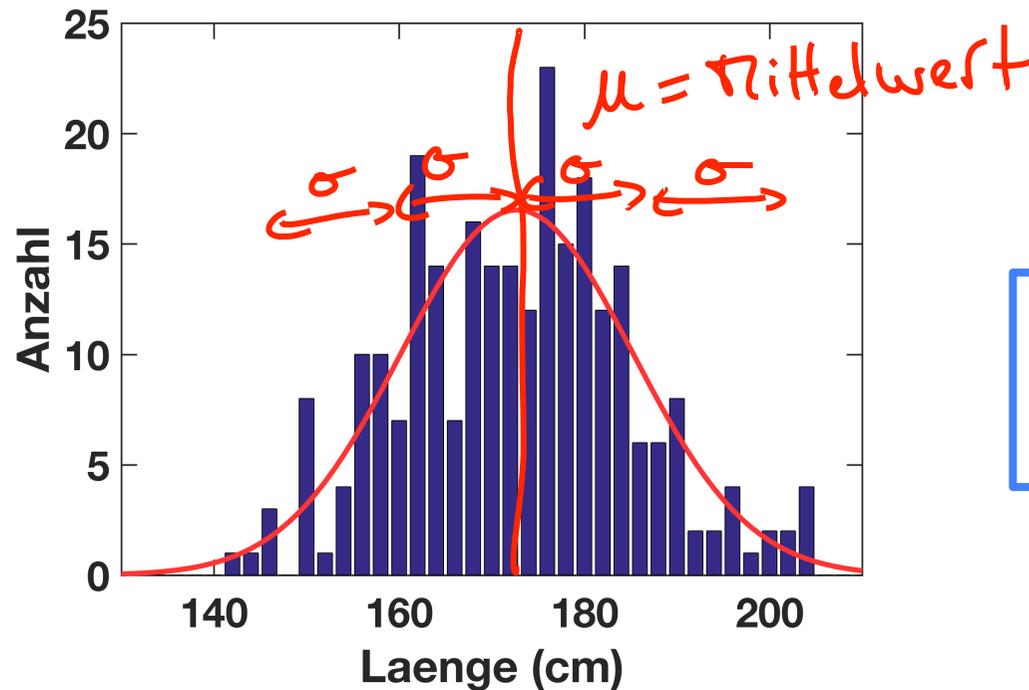
Gauß- (oder Normal-)Verteilung



https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

Carl Friedrich Gauß
(1777-1855)

Verteilung der Körperlänge aller PN1 Studierenden
(simuliert) mit Gauß-Funktion (rote Linie):



68% in $\pm 1\sigma$

95% in $\pm 2\sigma$

99% in $\pm 3\sigma$

Größen, die von vielen zufälligen additiven Faktoren abhängen sind normal-verteilt.

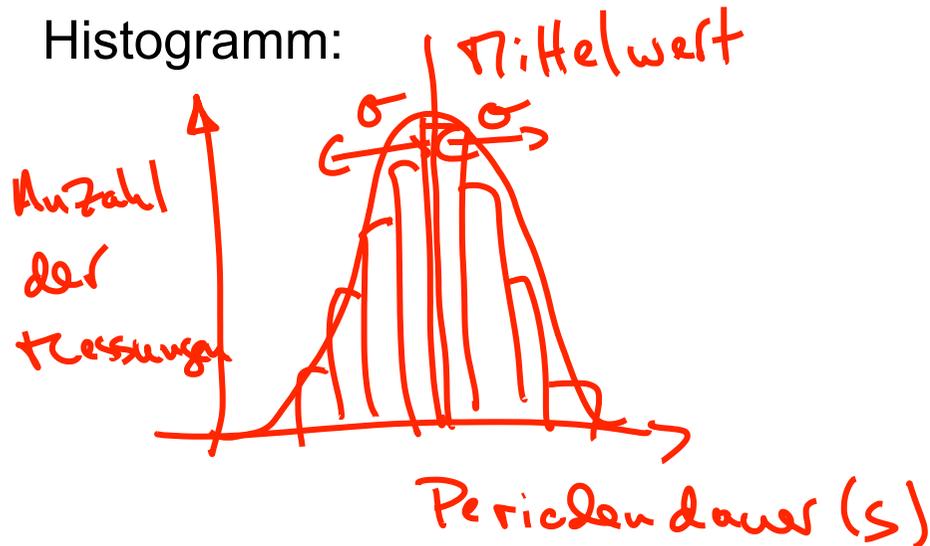
Gaußverteilung: $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Mittelwert: μ Standardabweichung: σ

Interpretation von statistischen Größen im Zusammenhang mit Messfehlern

Experiment: Pendel – Zeitmessung

Histogramm:



Stichprobenfehler = Wie genau ist „wahrer“ Wert nach N Messungen bestimmt?

$$\sigma_{SEM} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Mittelwert = beste Schätzung des wahren Wertes

$$\langle x \rangle = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

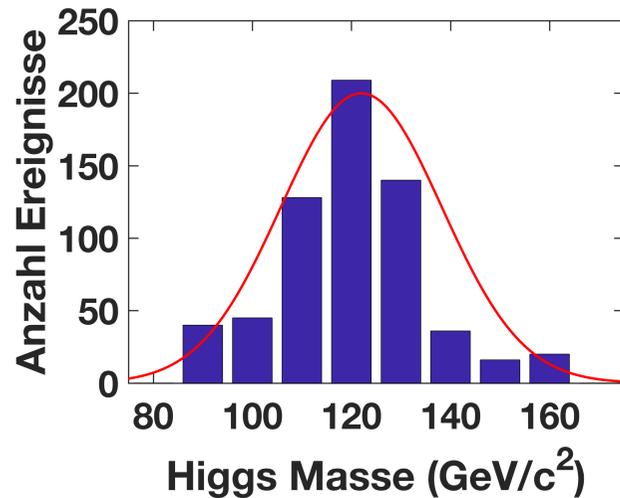
Standardabweichung = Fehler der Einzelmessung

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Statistik für Messfehler

BEISPIEL:

Masse des Higgs Bosons



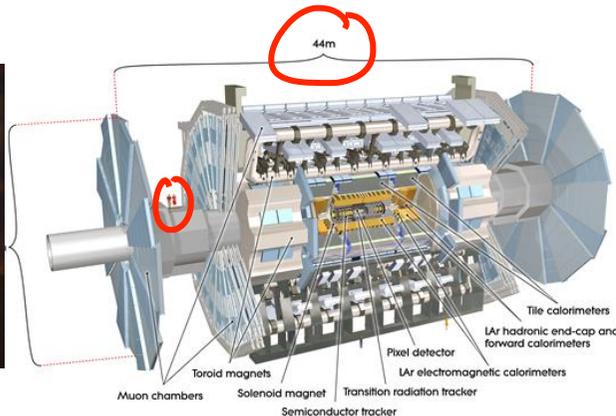
Daten aus <http://quarknet.fnal.gov/archive/run2/hbins.shtml>

Für wiederholte, statistisch unabhängige Messungen einer Messgröße (ohne systematische Fehler):

- **Mittelwert:** Beste Schätzung des „wahren“ Wertes.
- **Standardabweichung:** Fehler der Einzelmessung. 68% der Messungen fallen in den Bereich $\pm 1 \sigma$.
- **Stichprobenfehler**
Wie genau ist „wahrer“ Wert nach N Messungen bestimmt?



Peter Higgs
Nobelpreis 2013



<https://cds.cern.ch/images/CERN-GE-0803012-01>

Kombination von Messfehlern

BEISPIEL: Messung von Körpergröße „mit Schuhen“

Körperlänge (mit Zollstock gemessen): $167,0 \pm 1,0$ cm

Schuhdicke (mit Schieblehre gemessen): $3,0 \pm 0,5$ cm

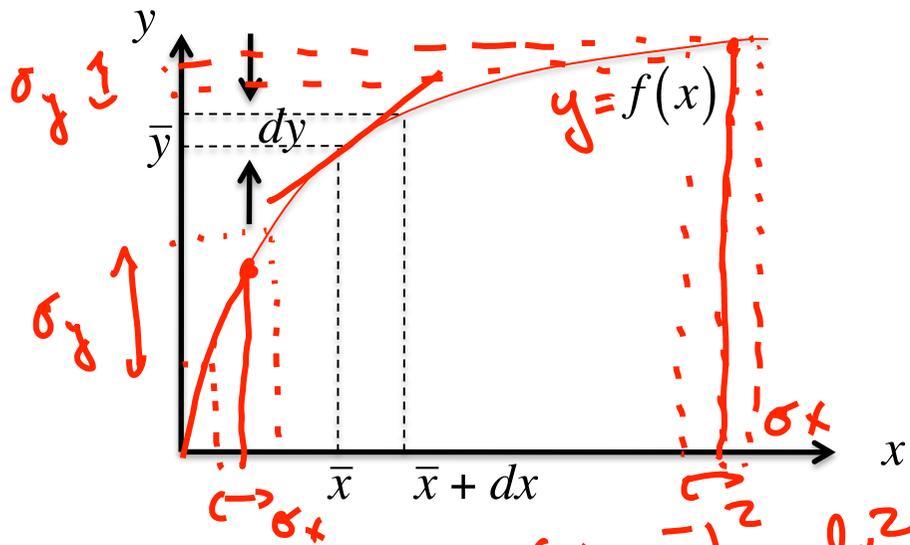
Die Gesamtgröße mit Schuhen ist also 170,0 cm.
Aber was ist der Messfehler?

- A) 1,0 cm { Okay, als Rundung
 ⇒ Ignoriere den kleineren Fehler
- B) 1,5 cm { $\sigma_{\text{gesamt}} = \sum_i |\sigma_i| = |1\text{cm}| + |0,5\text{cm}|$
 = 1,5 cm
 ⇒ sehr konservativ
- C) 1,1 cm { $\sigma_{\text{gesamt}} = \left(\sum_i \sigma_i^2 \right)^{1/2}$
 $\sqrt{(1\text{cm})^2 + (0,5\text{cm})^2} \approx 1,1\text{cm}$

Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Was ist, wenn die zu bestimmende Größe y eine Funktion der Messgröße x ist?

N -malige Messung liefert Standardabweichung



$$dy = \frac{df(x)}{dx} dx$$

$$\begin{aligned} (x_i - \bar{x})^2 &= dx^2 \\ (y_i - \bar{y})^2 &= dy^2 \\ &= \left(\frac{df}{dx} \cdot dx\right)^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_y = \frac{df}{dx} \sigma_x$$

„Fortgepflanzte Standardabweichung“

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N - 1}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{df}{dx} (x_i - \bar{x})\right)^2}{N - 1}}$$

Gaußsche Fehlerfortpflanzung und Kombination von Messfehlern

Quadratische Addition der fortgepflanzten Messfehler:

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2}$$

Zu bestimmende Größe y ist eine Funktion f von mehreren Messgrößen x_i

Beispiele:

Addition:

$$y = f(A, B) = A + B \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{(1 \cdot \sigma_A)^2 + (1 \cdot \sigma_B)^2}$$

(Quadratische Addition der Fehler)

Multiplikation:

$$y = f(A, B) = A \cdot B \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{(B \cdot \sigma_A)^2 + (A \cdot \sigma_B)^2}$$

Relativen Fehler:

$$\frac{\sigma_y}{y} = \frac{\sigma_y}{A \cdot B} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{A} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{B} \right)^2}$$

Quadratische
Addition
des relativen
Fehler

Vorsicht!

- Gilt nur näherungsweise
- Gilt nur für voneinander unabhängige Variable

SI Einheiten (Système internationale d'unités)

Physik 1

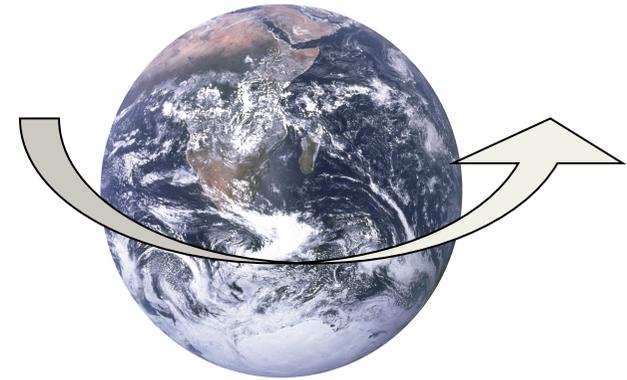
Basisgröße und Dimensionsname	Größensymbol	Dimensionsymbol	Einheit	Einheitenzeichen	Definition der Einheit
Länge	l	L	Meter	m	Länge der Strecke, die das Licht im Vakuum während der Dauer von $1 / 299.792.458$ Sekunde zurücklegt. ^[B 1]
Masse	m	M	Kilogramm	kg	Das Kilogramm ist gleich der Masse des Internationalen Kilogrammprototyps.
Zeit	t	T	Sekunde	s	Das $9.192.631.770$ -fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur-niveaus des Grundzustandes von Atomen des Caesium-Isotops ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.
Stromstärke	I oder i	I	Ampere	A	Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der, durch zwei parallele, geradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern pro Meter Leiterlänge die Kraft 2×10^{-7} Newton hervorrufen würde. ^[B 2]
Thermodynamische Temperatur	T	Θ	Kelvin	K	$1 / 273,16$ der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunkts von Wasser genau definierter isotopischer Zusammensetzung. ^[B 3]
Stoffmenge (Substanzmenge)	n	N	Mol	mol	Die Stoffmenge eines Systems, das aus ebenso viel Einzelteilchen besteht, wie Atome in 0,012 Kilogramm des Kohlenstoff-Isotops ^{12}C in ungebundenem Zustand enthalten sind. ^[B 4] Bei Benutzung des Mol müssen die Einzelteilchen spezifiziert sein und können Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen sowie andere Teilchen oder Gruppen solcher Teilchen genau angegebener Zusammensetzung sein.
Lichtstärke	I_v	J	Candela	cd	Die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz 540×10^{12} Hz ^[B 5] aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung $1 / 683$ Watt pro Steradian beträgt.

Zeit – Sekunde (s)

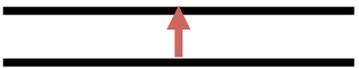
Ursprüngliche Definition:

$$\frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60} \text{ eines Tages} \approx 1 \text{ s}$$

→ periodische Vorgänge



<https://de.wikipedia.org/wiki/Erde>

Heute:  Hyperfein-Übergang von Cäsium-133

9 192 631 770 Schwingungen sind eine Sekunde

Hochpräzise Laserspektroskopie ist ein sehr aktives Feld, gerade in München!



https://de.wikipedia.org/wiki/Theodor_H%C3%A4nsch

Theodor Hänsch (LMU)
Physik Nobelpreis 2005

9.11.20



Prof. Dr. Jan Lipfert

Länge – Meter (m)

Ursprünglich Definition: Der zehnmillionste Teil eines Viertelerdumfangs (Äquator-Pol)

Auch der **Urmeter** hat ausgedient!

Heute: Ein Meter ist die Strecke die Licht im Vakuum in einer Zeit von $1/299\,792\,458$ s durchläuft!
ABER: Nach wie vor gibt es **sekundäre Normale**.

Experiment: Messung der Lichtgeschwindigkeit

$$\Delta x = 13 \text{ m} \pm 0,5 \text{ m}$$

$$\Delta t = 86,6 \text{ ns} \pm 1 \text{ ns}$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 13 \text{ m}}{86,6 \cdot 10^{-9} \text{ s}} = 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 0,1 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



https://en.wikipedia.org/wiki/File:US_National_Length_Meter.JPG

Kopie des Urmeters
(Platin-Iridium Legierung)

Masse – Kilogramm (kg)

Ursprüngliche Definition: Ein Kilogramm ist gleich der Masse des Internationalen Kilogrammprototyps

Die Masse ist Ursache von Gravitation: **schwere Masse**

$$F_{\text{grav}} = -G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Masse ist ein Maß für die Trägheit eines Körpers: **träge Masse**

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Die schwere und träge Masse sind äquivalent!

- Äquivalenzprinzip (Galilei): Alle Körper durchlaufen bei gleichem Anfangsort und gleicher Anfangsgeschwindigkeit die gleiche Fallkurve.
- Starkes Äquivalenzprinzip (Einstein): In einem frei fallenden Bezugssystem sind auf kleinen Skalen keine Gravitationsfelder nachweisbar.



<http://sciencev1.orf.at/news/149489.html>

Urkilo in Paris

Umrechnung von Einheiten

Allgemeine Strategie zur Umrechnung von Einheiten:

Einfaches Beispiel: Umrechnung der Marathondistanz von 42,195 km in m

1) Aufstellung einer Gleichung mit den umzurechnenden Größen.

$$1000 \text{ m} = 1 \text{ km}$$

2) Umformen der Gleichung, so dass auf einer Seite der Gleichung „1“ steht und auf der anderen Seite die Größe, in die man umrechnen will, im Zähler und die Größe, aus der man umrechnen will, im Nenner.

$$1 = \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}$$

3) Multiplizieren mit dem Ausdruck aus Schritt 2 und Kürzen.

$$42,195 \text{ km} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \\ = 42195 \text{ m}$$

Umrechnung von Einheiten: Ein Beispiel

- Pheidippides lief die Strecke von Marathon nach Athen der Überlieferung nach mit einer Geschwindigkeit von 23 Riden pro Stunde.
- Die Ride ist eine altgriechische Längeneinheit und war definiert als 4 Stadien; 1 Stadion wiederum bestand aus 6 Plethren.
- In modernen Einheiten ist ein Plethron 30,8 m.



<https://en.wikipedia.org/wiki/Pheidippides>

Pheidippides
(530 – 490 BC)

$$23 \frac{\text{Riden}}{\text{h}} \cdot \frac{4 \text{ Stadien}}{\text{Ride}} \cdot \frac{6 \text{ Plethren}}{\text{Stadion}} \cdot \frac{30,8 \text{ m}}{\text{Plethron}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}}$$

$$= 17 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Eigentlich: $17,0016 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

ABER · Signifikante Stellen!

Signifikante Stellen

Bei Angaben von physikalischen Größen gibt man nur **signifikante Stellen** an, d.h. Stellen deren Wert bekannt ist. Der Messfehler entspricht also in etwa der letzten angegebenen Stelle.

$1,8\text{ m}$ Fehler $\sim 0,1\text{ m}$ $1,80\text{ m}$ Fehler $\sim 0,01\text{ m}$ 180 cm → Fehler unklar

Faustregel: Bei der Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division von mehreren Zahlen hat das Ergebnis nur so viele signifikante Stellen, wie die Zahl mit der geringsten Anzahl an signifikanten Stellen.

z.B. $20,51\text{ cm} \cdot 20\text{ cm} = 410\text{ cm}^2$
(Nicht angeben: $410,2\text{ cm}^2$)

Tips zum Bearbeiten von Aufgaben:

- Für Zwischenergebnisse ist es sinnvoll, 1-2 zusätzliche Stellen mitzunehmen.
- Endergebnisse sollten nur so viele signifikante Stellen haben, wie die Angaben der Aufgabe erlauben.
Im Allgemeinen sind nicht alle Stellen, die der Taschenrechner angibt, signifikant.

Arten von Messgrößen

Skalare Größen

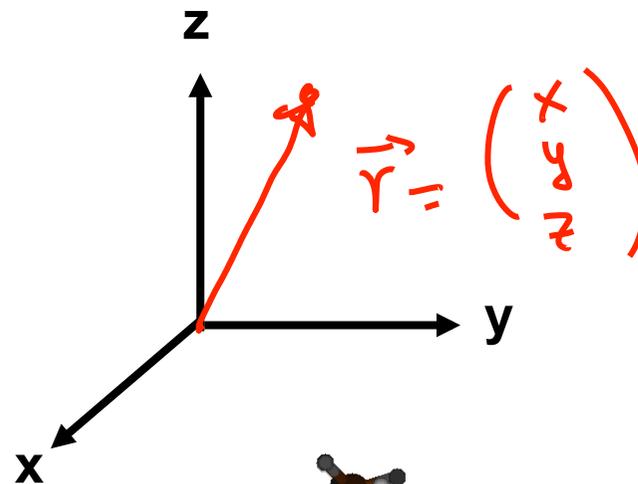
Zahlenangabe & Einheit
(oder nur Zahlenangabe)



Zeit
Masse
Länge
Temperatur

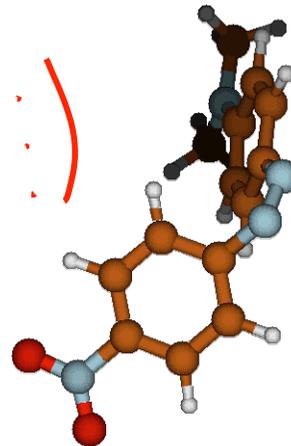
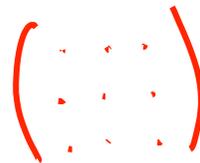
Vektorielle Größen

Zahlenangabe & Einheit
und Richtung, 3 Angaben



Tensorielle Größen

Zahlenangabe & Einheit
in Matrix, 9 Angaben



↗ ↘ Polarizierbarkeit

Zusammenfassung: Einheiten und Messfehler

- Das International Einheitensystem (SI) kennt sieben Grundgrößen: **Meter, Kilogramm, Sekunde**, Ampere, Kelvin, Mol, Candela

Kontrolle der Einheiten ist eine sehr nützliche Strategie zur Überprüfung von Ergebnissen und Lösungswegen!



https://en.wikipedia.org/wiki/File:US_National_Length_Meter.JPG

Kopie des Urmeters
(Platin-Iridium Legierung)

- Messungen haben immer einen **Messfehler**.
- **Mittelwert**: beste Schätzung des „wahren“ Wertes

$$\langle x \rangle = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

- **Standardabweichung**: Fehler der Einzelmessung

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

- **Stichprobenfehler**: Wie genau ist „wahrer“ Mittelwert nach N Messungen bestimmt?

$$\sigma_{SEM} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Zusammenfassung: Fehlerfortpflanzung

- **Gaußsche Fehlerfortpflanzung:** Für den Fall, dass eine Größe y von den Messgrößen x_j abhängt und die Größen x_j unkorreliert sind

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \sigma_{x_j} \right)^2}$$

- **Fehlerfortpflanzung für Addition und Subtraktion:**
(Absolute) Fehler addieren sich quadratisch

$$\sigma_{Ges} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{x_j}^2}$$

- **Fehlerfortpflanzung für Multiplikation und Division:**
Relative Fehler addieren sich quadratisch

$$\frac{\sigma_{Ges}}{y} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\sigma_{x_j}}{x_j} \right)^2}$$

„Powers of Ten“



Powers of Ten™ (1977)

“Powers of Ten” (1977)

<https://www.youtube.com/watch?v=0fKBhvDjuy0>



Image worth spreading: Cosmic Eye (Original in HD)

„Cosmic Eye“ (2012)

<https://www.youtube.com/watch?v=jfSNxVqprvM>