

PN1

Besprechung der 6. Vorlesung

07.12.2020

Prof. Dr. Jan Lipfert und Prof. Dr. Ralf Jungmann

WS 2020/2021

Einstiegsfrage

Die Skizze zeigt einen Ball ($m = 1 \text{ kg}$), der vom Boden abprallt. Was ist die Impulsänderung in $(x ; y)$?

$$\theta = 45^\circ \quad |\vec{v}| = |\vec{u}| = 10 \text{ m/s}$$

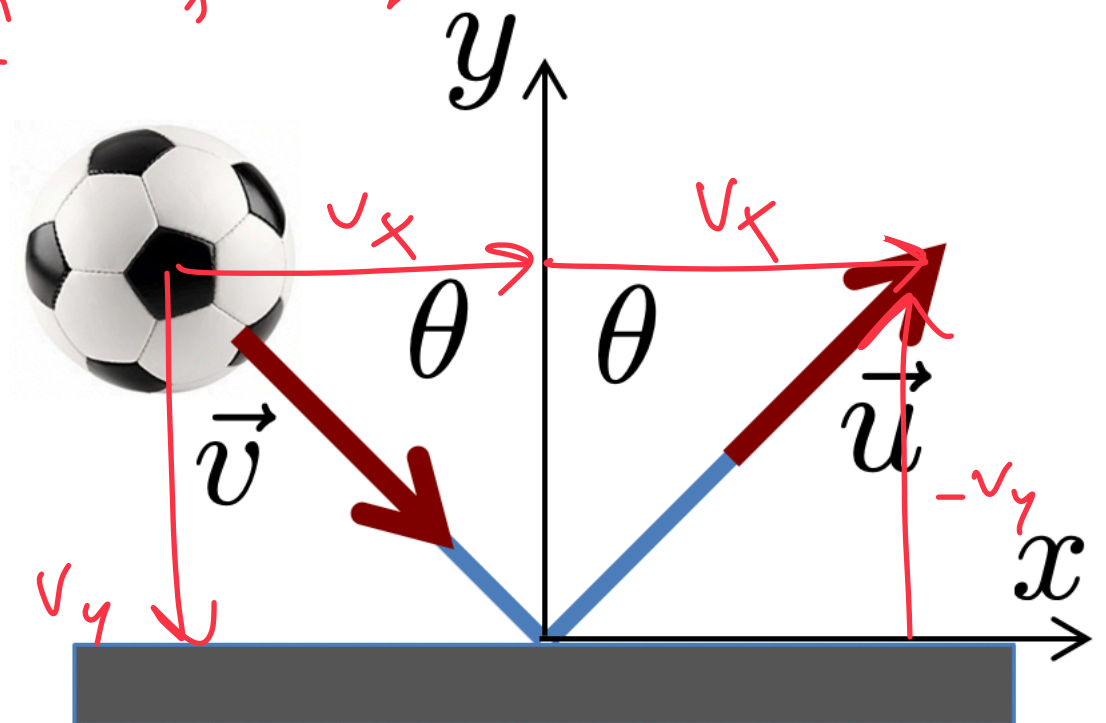
$$v_x = v_y = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\text{m/s (45°)}} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_x = v_x' \Rightarrow \Delta p_x = 0$$

$$v_y = -v_y' \Rightarrow p_y = -p_y'$$

$$\Rightarrow \Delta p_y = 2 \cdot p_y = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1 \text{ kg}$$

- (A) $(0 ; 10) \text{ kg}\cdot\text{m/s}$
- (B) $(7,1 ; 0) \text{ kg}\cdot\text{m/s}$
- (C) $(0 ; 7,1) \text{ kg}\cdot\text{m/s}$
- (D) $(0 ; 14,1) \text{ kg}\cdot\text{m/s}$



Wiederholung: Impuls und Stöße

Definition des Impuls : $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ $[p] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{N} \cdot \text{s}$

2. Newton'sches Axiom in Impulsform :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = m \cdot \dot{\vec{v}} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$m = \text{const.}$

Impulserhaltung

Der Gesamtimpuls

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i$$

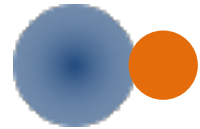
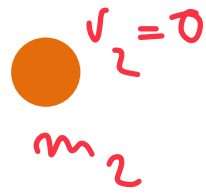
eines abgeschlossenen Systems aus Massepunkten ist zeitlich konstant

Keine Annahme über Art der Kräfte ;
 E_{mech} gilt $\boxed{\text{nur}}$ bei konservativen Kräften ;

$$\sum F_{\text{ex}} = 0$$

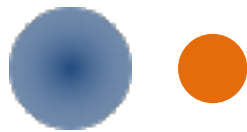
Wiederholung: Impuls und Stöße

• Stöße:



1. Grenzfall: **Perfekt (vollständig) inelastischer Stoß**

Impulserhaltung



2. Grenzfall: **Perfekt (vollständig) elastischer Stoß**

Impuls + Energieerhaltung

$$\textcircled{1} \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u \quad ; \quad v_2 = 0$$

$$\Rightarrow u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

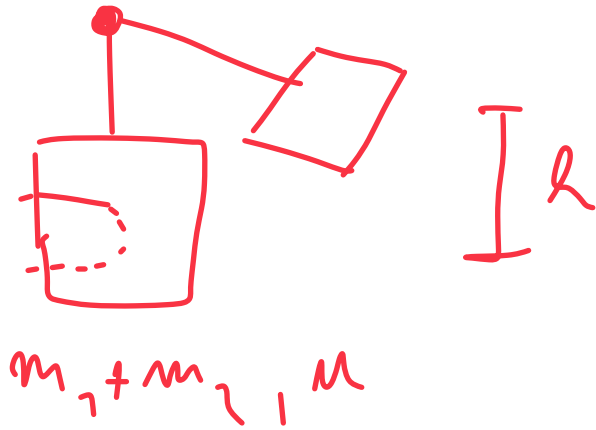
$$\textcircled{2} \quad E_{\text{kin}}^{\text{nach}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot u^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \cdot \underbrace{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}_{< 1} < \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}_{E_{\text{kin}}^{\text{vorher}}}$$

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

Beispiel: Ballistisches Pendel

m_2, v_2



$$m_1 = 5 \text{ kg}$$

$$m_2 = 10 \text{ g} = 0,01 \text{ kg}$$

$$h = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$$

1) Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot u^2 = m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \Delta E_{\text{diss}}$$

ohne E_{diss} nicht korrek

a) Berechne u :

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}} \Rightarrow u = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Berechne v_2 : Wie viel E_{kin} wird in E_{diss} umgewandelt?

$$\text{IE: } m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u \Leftrightarrow v_2 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot u - m_1 v_1}{m_2}$$

$$\Rightarrow v_2 = 1002 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

mit EE:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 + \Delta E_{\text{dis}}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_{\text{dis}} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}_{=0} + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2$$

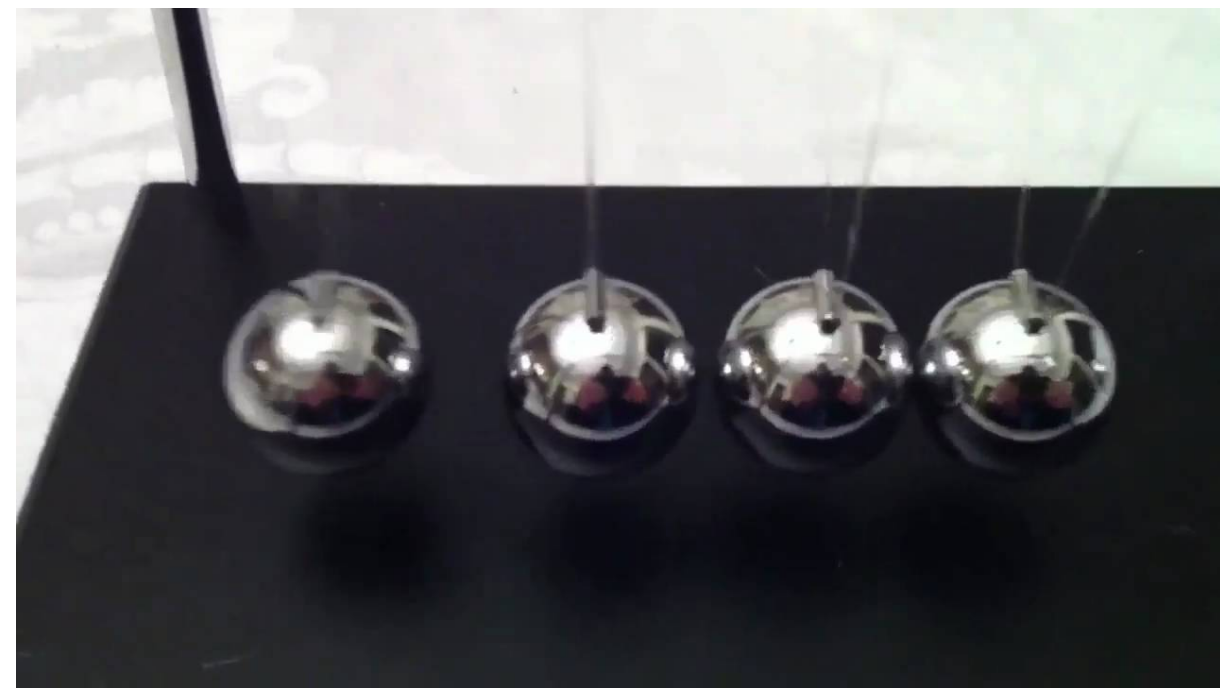
$$= 0 + \underbrace{\frac{1}{2} 0,01 \text{ kg} \cdot (1002 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}_{5020 \text{ J}} - \underbrace{\frac{1}{2} 5,01 \text{ kg} \cdot (2 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}_{10 \text{ J}}$$

$$= 5010 \text{ J}$$

\Rightarrow Fast gesamte kin. Energie geht in Verformung
und Wärme

Newton'sche Wiege

Kann es auch sein, dass eine Kugel ausgelenkt wird, jedoch zwei mit halber kinetischer Energie wegfliegen?



<https://www.youtube.com/watch?v=0LnbyjOyEQ8>

v' : $\frac{1}{2} m v'^2 = \frac{\frac{1}{2} m v^2}{2} \Rightarrow v' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v$

1) Geramtrimpuls vorher: $p_{\text{ges, vor}} = m \cdot v$

2) Geramtrimpuls nachher: $p_{\text{ges, nach}} = 2 \cdot m \cdot \frac{v}{\sqrt{2}} = m v \sqrt{2}$

\Rightarrow Widerspruch zur Impulserhaltung

<https://youtube.com/watch?v=OuA-znVMY3I>

Autozusammenstoß

S-Class

Test Weight:	2,308 kg	Test Speed:	50 km/h
Kinetic Energy:	222.61 kJ	Crash Overlap:	50 %

Safety Principle: Rigid Passenger Cell

Mass Ratio
2.1 / 1

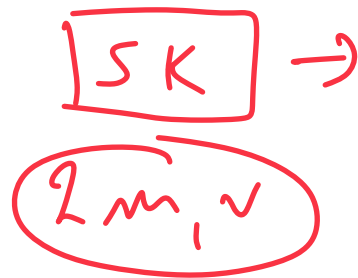
smart fortwo

Test Weight:	1,124 kg	Test Speed:	50 km/h
Kinetic Energy:	108.41 kJ	Crash Overlap:	50 %

Safety Principle: Tridion Cell



Autozusammenstoß



a) u nach Kollision:

$$p = p' \Leftrightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \Leftrightarrow u = \frac{m \cdot 2v + 2m \cdot v}{m + 2m} = \frac{4}{3} v$$

b) ΔE_{diss} + Verh. ΔE_{diss} zu E_{kin}

$$E = E' \Leftrightarrow \boxed{E_{\text{kin}} = E_{\text{kin}}' + \Delta E_{\text{diss}}} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 + \Delta E_{\text{diss}}$$

$$\Rightarrow \Delta E_{\text{diss}} = \frac{1}{3} m v^2 \quad \text{und} \quad \frac{\Delta E_{\text{diss}}}{E_{\text{kin}}} = \frac{1}{9}$$

c) Frontal urfall: $v_2 = -v$

analog zu a):
$$M = \frac{m \cdot 2v - 2m v}{m + 2m} = 0$$

analog zu b): $\Delta E_{\text{kin}} = 3mv^2$ mit $\frac{\Delta E_{\text{kin}}}{E_{\text{kin}}} = 1$

.) $|\vec{F}_{12}|$ vs $|\vec{F}_{21}|$ (Anfrage)

BEIDE GLEICH

.) Auswirkung auf Insassen:

Sprint: $a_1 = \frac{F}{m_1} = \frac{F}{m}$

S-Klasse: $a_2 = \frac{F}{m_2} = \frac{1}{2} \frac{F}{m} = \frac{1}{2} \cdot a_1$

↓
0

Zusammenfassung: Rocket Science

Impulserhaltung für nicht konstante Masse

$\rightarrow -w \cdot dm = m \cdot dv$ $v_0 = 0$

Im Intervall dt : $-w \frac{dm}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dm}{m} = -\frac{1}{w} dv$; Integration: $\ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right) = -\frac{1}{w}(v(t) - v_0) \Rightarrow v(t) = w \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$



First stage – S-IC	
Length	138.0 ft (42.1 m)
Diameter	33.0 ft (10.1 m)
Empty mass	287,000 lb (130,000 kg)
Gross mass	5,040,000 lb (2,290,000 kg)
Engines	5 Rocketdyne F-1
Thrust	7,891,000 lbf (35,100 kN) sea level
Specific impulse	263 seconds (2.58 km/s) sea level
Burn time	168 seconds
Fuel	RP-1 / LOX

Second stage – S-II	
Length	81.5 ft (24.8 m)
Diameter	33.0 ft (10.1 m)
Empty mass	88,400 lb (40,100 kg) ^[note 3]
Gross mass	1,093,900 lb (496,200 kg) ^[note 3]
Engines	5 Rocketdyne J-2
Thrust	1,155,800 lbf (5,141 kN) vacuum
Specific impulse	421 seconds (4.13 km/s) vacuum
Burn time	360 seconds
Fuel	LH₂ / LOX

Third stage – S-IVB	
Length	61.6 ft (18.8 m)
Diameter	21.7 ft (6.6 m)
Empty mass	33,600 lb (15,200 kg) ^{[8][note 4]}
Gross mass	271,000 lb (123,000 kg) ^[note 4]
Engines	1 Rocketdyne J-2
Thrust	232,250 lbf (1,033.1 kN) vacuum
Specific impulse	421 seconds (4.13 km/s) vacuum
Burn time	165 + 335 seconds (2 burns)
Fuel	LH₂ / LOX