Wiederholungsklausur

Name: MUSTERLÖSUNG

Matrikelnummer: ______________________

- Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jede Seite und legen Sie Ihren Lichtbildausweis bereit.
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, zwei beidseitig beschriebene DIN A4 Blätter, Wörterbuch
- Bearbeitungszeit: 120 min
- Ergebnisse bitte nur auf die Aufgabenblätter (ggf. auch die Rückseiten beschreiben).
- Viel Erfolg!

Aufgabe	Erreichte Punkte	Mögliche Punkte
1		30
2		20
3		20
4		15
5		15
Σ		100

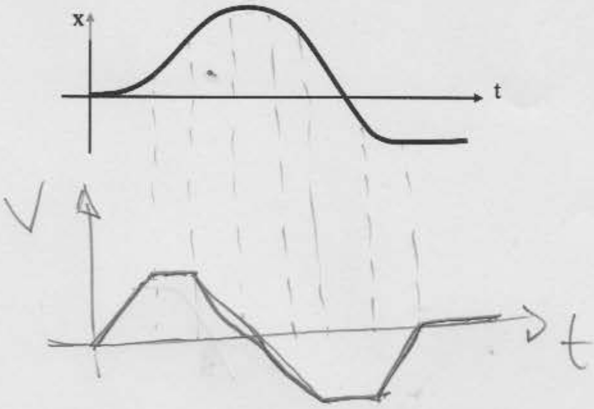
Einige nützliche Konstanten
Gravitationskonstante $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Erdmasse $M_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
Erdradius $R_E \approx 6400$ km
Dichte von Luft bei Normaldruck und T = 20°C: 1,2 kg/m^3
Dichte von Wasser bei Normaldruck und T = 20°C: 1000 kg/m^3
Normaldruck: 1 atm = 1013 mbar = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa

Name: ______________________________

Aufgabe 1

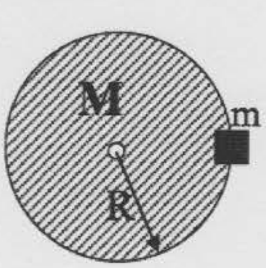
Verständnisfragen (30 Punkte). Geben Sie kurze Antworten (1-2 Sätze, bzw. kurze Rechnung, bzw. einfache Skizze) auf die folgenden Fragen.

a) Ein Zug fährt auf einer geraden Strecke. Der Graph unten zeigt seine Position als Funktion der Zeit. Zeichnen Sie den dazugehörigen Graphen der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit.



$\boxed{\text{Siehe Vorlesung 2, z.B. Folie 19}}$

b) Eine massive Scheibe mit Masse M und Radius R (siehe Skizze) dreht sich um eine reibungsfreie Achse durch ihren Mittelpunkt (die senkrecht zur Papierebene steht). Eine Punktmasse m befindet sich am Rand der Scheibe. Was ist das Gesamtträgheitsmoment des Systems aus der Scheibe und der kleinen Masse m für diese Rotationsachse?



$$I = \underbrace{\tfrac{1}{2} M R^2}_{\text{Scheibe}} + \underbrace{m R^2}_{\text{kleine Masse } m}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2} M + m\right) R^2$$

$\boxed{\text{Siehe Vorl. 7, Folie 14 und V8, Folie 3}}$

c) Eine äußerst kräftige Ameise zieht nun die kleine Masse m in Richtung des Mittelpunktes der Scheibe aus der letzten Teilaufgabe. Wie verändert sich die Rotationsfrequenz der Schreibe? Warum?

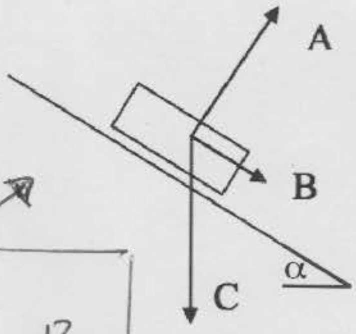
$\boxed{\text{Siehe V8, Folie 9}}$

Der Beitrag mR^2 zum Trägheitsmoment nimmt ab. Da $\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const}$ (Drehimpulserhaltung), $I \downarrow \Rightarrow \vec{\omega} \uparrow$, d.h. die Rotationsfrequenz nimmt zu.

Beachte: E_{rot} ist nicht konstant, die Ameise verrichtet Arbeit.

Name: ________________________________

d) Ein Wagen der Masse m ist auf einer reibungsfreien schiefen Ebene, die einen Winkel α zur Horizontalen hat (siehe Abbildung). Geben Sie Ausdrücke für die Größen der auf den Wagen wirkenden Kräfte A, B und C an.



Schwerkraft $C = m \cdot g$

Hangabtriebskraft $B = m \cdot g \cdot \sin\alpha$

Auflagekraft (Gegenkraft zur Normalkraft) $A = m \cdot g \cdot \cos\alpha$

Siehe V4, Folie 13 & V5, Folie 3

e) Was ist die (Netto-) resultierende Kraft auf den Wagen aus der letzten Teilfaufgabe? Was bedeutet das für seine Bewegung, wenn er aus der in der Abbildung gezeigten Situation losgelassen wird?

$F_{Netto} = B = m \cdot g \cdot \sin\alpha$

Der Wagen wird gleichmäßig beschleunigt, mit $a = g \cdot \sin\alpha$.

f) Ein Heliumballon hat ein mit Helium der Dichte ρ_{He} gefülltes Volumen V. Was ist die maximale Masse der Ballon-Konstruktion und der Nutzlast, so dass der Ballon noch in Luft der Dichte ρ_{Luft} schwebt?

Siehe V9 Folie 4 & Luftschiff-aufgabe der 1. Klausur

$$F_{Nutzlast} = F_{Auftrieb} - F_{Gewichtskraft, He} = V(\rho_{Luft} - \rho_{He})\, g$$

$\Rightarrow m_{Nutzlast} = V(\rho_{Luft} - \rho_{He})$ ist die maximale Masse der Konstruktion + Nutzlast

g) Wenn Sie das Helium aus dem Ballon in der letzten Teilaufgabe einatmen, klingt ihre Stimme höher. Was können sie daraus über die Schallgeschwindigkeit in Helium im Vergleich zu Luft sagen?

Siehe z.B. V11, Folie 18

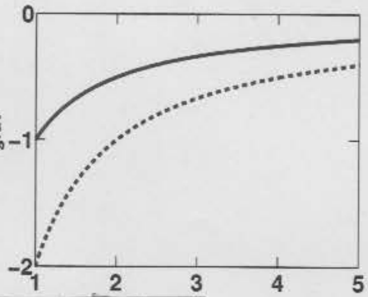
Allgemein: $c = \lambda f$

λ bleibt konstant (durch die Anatomie bestimmt)

$\rightarrow f \uparrow$ bedeutet $c \uparrow$, d.h. die Schallgeschwindigkeit in Helium ist größer als in Luft.

Name: ____

h) Zwei kugelförmige Planeten haben den gleichen Radius, aber einer der beiden Planeten hat die doppelte Dichte im Vergleich zum anderen. Die Abbildung unten zeigt die potentielle Energie der Schwerkraft als Funktion des Abstandes zum Planetenmittelpunkt r für die beiden Planeten als gestrichelte und als durchgezogene Linie. Welche der beiden Linien entspricht dem Planeten mit der größeren Dichte? Warum?



Potentielle Energie der Gravitation:

$$E_{grav} = -\frac{G M_{planet} m}{r}$$

Größere Dichte $\Rightarrow$ größere M_{planet}, d.h. die gestrichelte Linie entspricht dem dichteren Planeten.

$\boxed{\text{Siehe V6, Folie 10}}$

i) Nun betrachten Sie zwei Fadenpendel gleicher Länge und mit gleichen Pendelmassen, die sich auf den Oberflächen der beiden Planeten aus der letzten Teilaufgabe befinden. Welches Fadenpendel schwingt mit der größeren Schwingungsperiode? Was ist das Verhältnis der Schwingungsperioden des Pendels auf dem dichteren Planeten zum Pendel auf dem weniger dichten Planeten?

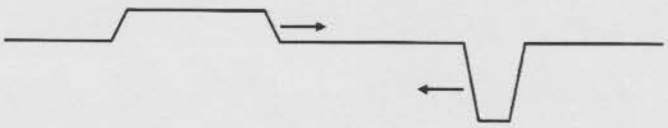
$\boxed{\text{Siehe V5, Folie 13 und V10, Folie 14}}$

Allgemein $T = 2\pi \sqrt{l/g}$

$g = -\frac{G M_{planet}}{r_{planet}^2}$ $\Rightarrow$ Größere M_{planet} $\Rightarrow$ Größeres g und kleineres T für den dichteren Planeten

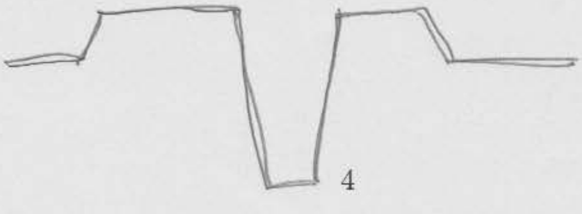
$$T_{dicht}/T_{leicht} = \left(g_{leicht}/g_{dicht}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

j) Zwei wellenartige Auslenkungen eines Seiles (das als linear-elastisch angenommen werden kann) laufen aufeinander zu (siehe Abbildung). Zeichnen Sie schematisch die Gesamtauslenkung zum Zeitpunkt, an dem die Wellen durcheinander hindurchlaufen.



Superpositionsprinzip:

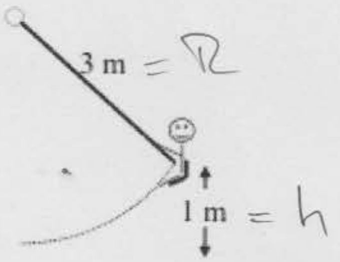
$\boxed{\text{Siehe V11, Folie 16}}$



Name: ______________________

Aufgabe 2

Schaukelndes Kind (20 Punkte). Ein Kind sitzt auf einer Schaukel, die an einem 3 m langen Seil hängt. Das Kind hat die Masse $M = 40$ kg und startet aus der Ruhe 1 m über dem tiefsten Punkt der Schaukel, siehe Skizze. Sie können den Effekt von Reibung vernachlässigen.



$\boxed{h = \frac{1}{3} R}$

a) Was ist seine Geschwindigkeit, wenn das Kind den tiefsten Punkt erreicht?

Siehe z.B. V5, Folie 27

Betrachte Energieerhaltung:

Zu Beginn: $E_{ges} = E_{kin} + E_{pot}$

$= 0 + M \cdot g \cdot h = 40 kg \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2} \cdot 1 m$

$(= 392 J)$

Am tiefsten Punkt: $E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} m v^2 + 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = m \cdot g \cdot h \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{m}{s^2} \cdot 1 m}$

$= \underline{\underline{4.4 \ m/s}}$

b) Was ist die Spannung im Seil, wenn das Kind den tiefsten Punkt erreicht?

$F_{Seil} = F_{Schwerkraft} + F_{Zentripetalkraft}$

$= M \cdot g + \frac{M \cdot v^2}{R}$

$\boxed{h = \frac{1}{3} R}$

$= M \left(g + \frac{2gh}{R}\right) = M \left(g + \frac{2}{3} g\right) = \frac{5}{3} M \cdot g$

$= \frac{5}{3} \cdot 40 kg \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2} = \underline{653{,}3 \ N}$

Name: ____________________

c) Unter der Annahme, dass Sie das System von Schaukel und Kind als ideales (mathematisches) Pendel nähern können: Wie lange dauert es, bis das Kind vom Zeitpunkt, an dem es den tiefsten Punkt durchquert (der Position in Teilaufgabe a), wieder in seiner Ausgangslage ankommt (der Position in der Skizze)?

$T = 2\pi \sqrt{l/g}$

Vom tiefsten Punkt zur Ausgangslage $= \frac{3}{4} T$

$\Rightarrow \frac{3}{4} T = \frac{3}{4} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{3\,m}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}}} = \underline{\underline{2{,}6\ s}}$

$\boxed{\text{Siehe V10, Folie 14}}$

d) Wie ändern sich die Ergebnisse der ersten drei Teilaufgaben, wenn ein zweites gleich schweres Kind mit auf der Schaukel sitzt (so dass die Gesamtmasse 80 kg beträgt)?

Teilaufgabe a): $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ ändert sich nicht!

Teilaufgabe b): $F_{Seil} = \frac{5}{3} m \cdot g$ verdoppelt sich

auf $F'_{Seil} = \frac{5}{3} (80\,kg)\, 9{,}8\,\frac{m}{s^2} = \underline{\underline{1307\ N}}$

Teilaufgabe c): $\frac{3}{4} T = \frac{3}{4} 2\pi \sqrt{l/g}$ ändert sich nicht!

6

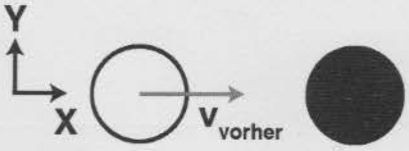
Name: ______________________________

Aufgabe 3

Billard (20 Punkte). Wir betrachten im folgenden Zusammenstöße einer weißen Billardkugel mit einer schwarzen Billardkugel. Die schwarze Billardkugel befindet sich in allen Teilaufgaben am Anfang in Ruhe. Beide Kugeln haben die gleiche Masse. Sie können Komplikationen durch Reibung und "Spin" vernachlässigen.

a) Zunächst betrachten wir den Fall, dass die beiden Kugeln zentral stoßen, so dass die Bewegung vor und nach dem Stoß in einer geraden Linie (die wir als x-Achse nehmen; siehe Skizze) liegt. Für den Fall, dass die weiße Kugel vor dem Stoß eine Geschwindigkeit $v_{vorher} = (5\ ,\ 0)$ m/s hat (d.h. mit 5 m/s in +x-Richtung läuft) und der Stoß vollkommen elastisch ist, was sind die Geschwindigkeiten der weißen und der schwarzen Kugel nach dem Stoß?

Siehe V6, Folien 19 & 20



Elastischer Stoß: Energie + Impulserhaltung

$$v_{nachher,\,weiß} = \frac{m_{weiß} - m_{schwarz}}{m_{weiß} + m_{schwarz}}\, v_{weiß,v.} = 0$$

$$v_{nachher,\,schwarz} = 2 m_{weiß} / (m_{weiß} + m_{schwarz})\, v_{weiß,v.} = v_{weiß,\,vorher} = (5,0)\,\frac{m}{s}$$

Dies ist der Fall des "Managerspielzeugs".

b) Jetzt gehen wir von den gleichen Anfangsbedingungen wie im Aufgabenteil a) aus, bis auf die Tatsache, dass die Kugeln plötzlich aus einem Material bestehen, das sich durch den Stoß verklebt, so dass die Kugeln vollständig unelastisch stoßen und nach dem Stoß als gemeinsame Kugel der doppelten Masse weiterlaufen. Was ist die Geschwindgkeit der neuen schwarz-weißen Kugel? Zeigen Sie, dass bei diesem Stoß die kinetische Energie nicht erhalten wird.

vollständig inelastischer Stoß: Impulserhaltung

$$m_{weiß}\, v_{weiß,\,vorher} = m_{Gesamt} \cdot v_{Gesamt,\,nachher}$$

$$\Rightarrow v_{Gesamt,\,nachher} = \frac{m_{weiß}}{m_{weiß} + m_{schwarz}}\, v_{weiß,\,vorher}$$

Siehe V6, Folie 18

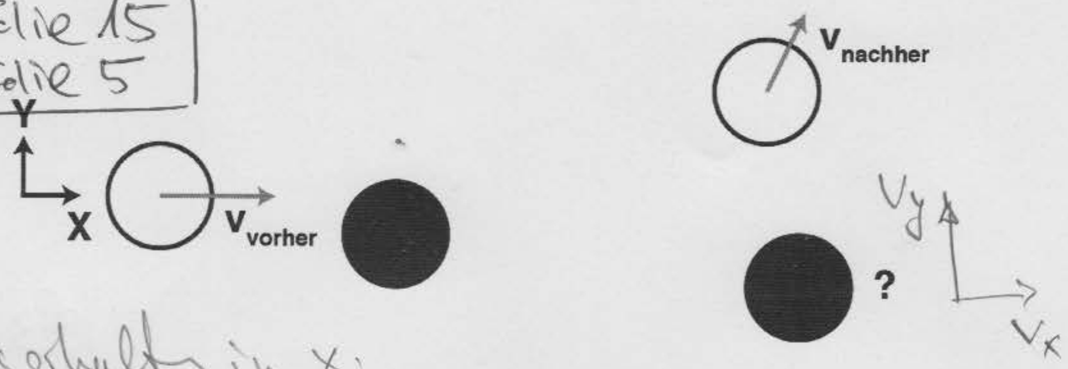
$$= \frac{1}{2}\, v_{weiß,\,vorher} = (2{,}5\ ,\ 0)\,\frac{m}{s}$$

$$E_{kin,\,vorher} = \frac{1}{2} m_{weiß} \left(5\,\frac{m}{s}\right)^2 = \frac{25}{2}\, m_{weiß}\, \frac{m^2}{s^2} \underset{=}{<} \frac{1}{2}(2 m_{weiß}) \left(2{,}5\,\frac{m}{s}\right)^2 = 6{,}25\, m_{weiß}\, \frac{m^2}{s^2} = E_{kin,\,nachher}$$

Name: ______________________________

c) Jetzt gehen wir wieder von einem komplett elastischen Stoß aus, betrachten aber den Fall, dass die Kugeln nicht zentral stoßen. Die Geschwindigkeit der weißen Kugel vor dem Stoß sei wieder $v_{vorher} = (5\ ,\ 0)$ m/s, die Geschwindigkeit der weißen Kugel nach dem Stoß sei $v_{nachher} = (1\ ,\ 2)$ m/s (d.h. 1 m/s in x=Richtung und 2 m/s in y-Richtung), siehe Skizze. Was ist die Geschwindigkeit der schwarzen Kugel nach dem Stoß?

Siehe V6, Folie 15
und V7, Folie 5



Impulserhaltung in x:

$$p_{vorher} = m_{weiß} \cdot 5\,m/s = p_{nachher} = m_{weiß} \cdot 1\,\frac{m}{s} + m_{schwarz} \cdot V_x$$

$$\boxed{m_{weiß} = m_{schwarz}} \Longrightarrow V_x = \underline{\underline{4\,m/s}}$$

Impulserhaltung in y:

$$p_{vorher} = 0 \;! \qquad p_{nachher} = m \cdot 2\,m/s + m \cdot V_y$$

$$\Longrightarrow V_y = -2\,m/s \qquad \text{Somit } V_{schwarz} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{m}{s}$$

d) Zeigen Sie, dass bei dem Stoß aus der letzten Teilaufgabe die kinetische Energie erhalten bleibt.

$$E_{kin,vorher} = \frac{1}{2} m v_{vorher}^2 = \frac{1}{2} m \cdot \left(25\,m^2/s^2\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{25}{2} m \cdot \frac{m^2}{s^2}}}$$

$$\overset{!}{=} E_{kin,nachher} = \frac{1}{2} m \left(1^2 + 2^2\right) \frac{m^2}{s^2} + \frac{1}{2} m \left(4^2 + 2^2\right) \frac{m^2}{s^2}$$

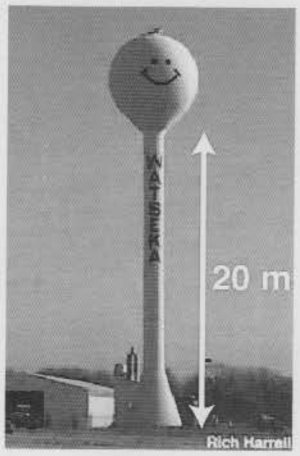
$$= \frac{1}{2} m \underbrace{5}_{1+4} \frac{m^2}{s^2} + \frac{1}{2} m \underbrace{20}_{16+4} \frac{m^2}{s^2} = \underline{\underline{\frac{25}{2} m \cdot \frac{m^2}{s^2}}} \quad \boxtimes$$

Name: ______________________________

Aufgabe 4

Smiley Face Water Tower (15 Punkte). Der Wasserturm in Watseka, Illinois, hat einen kugelförmigen Vorratstank, der komplett gefüllt $5{,}25 \cdot 10^5$ kg Wasser enthält. Der kugelförmige Vorratstank hat an der Oberseite ein offenes Belüftungsloch. Die Unterseite des Vorratstanks befindet sich 20 m über dem Erdboden, siehe Abbildung. Sie können Reibunseffekte und den Durchmesser der Wasserleitungen vernachlässigen.

a) Wie groß ist der statische Druck an einem Wasserhahn, der sich auf dem Niveau des Erdbodens befindet, wenn der Vorratstank komplett gefüllt ist?



$p_{statisch} = \rho_{Wasser} \cdot g \cdot h$

Berechne zunächst das Volumen der Kugel: $m_{Wasser} = \rho_{Wasser} \cdot V_{Kugel}$

$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{m_{Wasser}}{\rho_{Wasser}}$

R = Radius des kugelförmigen Tanks

$\Rightarrow R = \left(\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{m_{Wasser}}{\rho_{Wasser}}\right)^{1/3} = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{5{,}25 \cdot 10^5 \, kg}{1000 \, kg/m^3}\right)^{1/3}$

$= \underline{5 \, m}$

$p_{statisch} = \rho_{Wasser} \cdot g \overbrace{(2 \cdot \overset{\text{„}R\text{"}}{5} + 20)}^{2 \cdot 5m + 20m} m = 1000 \, kg/m^3 \cdot 9{,}8 \, m/s^2 \cdot 30 \, m$

$= \underline{2{,}94 \cdot 10^5 \, Pa}$

b) Wie groß ist der statische Druck an einem Wasserhahn, der sich im zweiten Stock eines Hauses 5 m über dem Niveau des Erdbodens befindet, wenn der Vorratstank genau halb voll ist?

$h = (20 \, m - 5 \, m) + 5 \, m = 20 \, m$

$\Rightarrow p_{statisch} = \rho_{Wasser} \cdot g \cdot h = 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2} \cdot 20 \, m$

Siehe V9, Folie 3

$= \underline{1{,}96 \cdot 10^5 \, Pa}$

Name: ______________________________

Aufgabe 5

Riesenkontrabass (15 Punkte). Für einen Eintrag ins *Guiness Book of World Records* bauen Sie einen riesigen Kontrabass mit 5 m langen Saiten, die an den Enden fest eingespannt sind. Eine Saite hat eine lineare Massendichte von 40 g/m und eine Grundfrequenz (1. Harmonische) von 20 Hz.

a) Berechnen Sie die Frequenz und Wellenlänge der 2. Harmonischen.

Grundfrequenz: $f_1 = n \frac{c}{2L}$ mit $n = 1$

2. Harmonische $f_2 = n \frac{c}{2L}$ mit $n = 2 \Rightarrow \boxed{f_2 = 2 \cdot f_1}$

$\boxed{\text{Siehe V11, Folie 18}}$

$\Rightarrow f_2 = 40\ \text{Hz}$; $\lambda_2 = L = 5\ \text{m}$

b) Was ist die Spannkraft in der Saite? (Hinweis: Die Wellengeschwindigkeit hängt von der Spannkraft und der linearen Massendichte ab. Wenn Sie die Formel nicht kennen, hilft die Betrachtung der Einheiten!)

$c = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$

Spannkraft $\hat{=} \tau$

Massendichte $\hat{=} \mu$

Aus $f_1 = \frac{c}{2L} \Rightarrow 2L f_1 = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \Rightarrow \tau = 4 L^2 f_1^2 \cdot \mu$

$= 4 \cdot (5\,\text{m})^2 \left(20 \frac{1}{s}\right)^2 \cdot 0{,}04 \frac{kg}{m}$

$= 1600\ \text{N}$

$\boxed{\text{Siehe V11, Folie 15}}$

c) Was wäre die Frequenz der 1. Harmonischen, wenn Sie die Saite mit einer für Saiteninstrumente üblichen Spannkraft von 100 N spannen? Welche Konsequenz hätte das für ein Konzert, das diese Frequenz verwendet?

$f_1 = \frac{c}{2L} = \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}}{2L} \Rightarrow f_1' = \frac{\sqrt{\frac{100\,\text{N}}{0{,}04\,\text{kg/m}}}}{2 \cdot 5\,\text{m}} = 5\ \text{Hz}$

5 Hz ist unterhalb der kleinsten Frequenz von ca. 20 Hz, die Menschen hören können. Die tiefsten Töne des Konzerts könnte man also nicht hören!

$\boxed{\text{Siehe V12, Folie 7}}$