

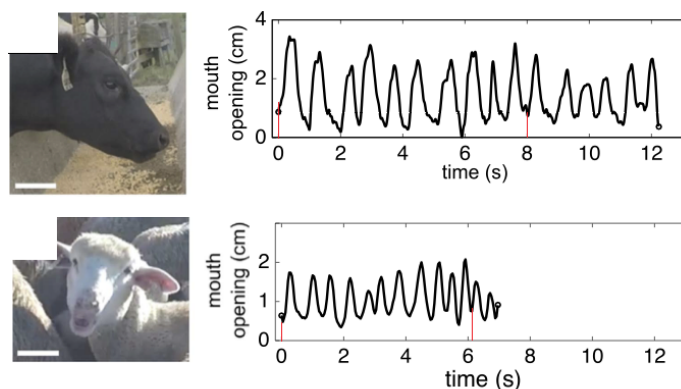
## Übungsblatt 9

### Ausgabe/Besprechung am 18.01.2021/25.01.2021

#### Aufgabe 1

**Harmonisches Kauen:** Ein Forscherteam hat die Kaubewegungen von Landsäugetieren untersucht (Viro *et al.*, *Scientific Reports*, 2017). Die Abbildung unten zeigt experimentelle Daten zur Öffnung des Maules als Funktion der Zeit für eine Kuh mit Masse  $M_K = 427$  kg (oben) und für ein Schaf mit Masse  $M_S = 31$  kg (unten). Wir wollen die Kaubewegung als harmonische Schwingung nähern.

- a) Bestimmen Sie aus den gezeigten Daten die ungefähre Kaufrequenz der Kuh  $f_K$  und des Schafes  $f_S$ . Was ist das Verhältnis  $f_K/f_S$ ?



Lösung:

Durch das Wählen von zwei Minima/Maxima als Referenzpunkte kann man mithilfe des Graphs näherungsweise die Kaufrequenz der Tiere bestimmen.

$$f = \frac{N}{\Delta t} \quad (1)$$

Hierbei ergeben sich folgende Werte:

Für die Kuh 10 Minima in 8 s:

$$f_K = \frac{10}{8 \text{ s}} \approx 1,3 \text{ Hz} \quad (2)$$

Für das Schaf 11 Minima in 6,2 s:

$$f_S = \frac{11}{6,2 \text{ s}} \approx 1,8 \text{ Hz} \quad (3)$$

Anhand der Frequenzen lässt sich nun das Verhältniss bestimmen:

$$\frac{f_K}{f_S} = \frac{10 \cdot 6,2}{11 \cdot 8} = 0,7045 \approx 0,7 \quad (4)$$

b) Was sind die Periodendauern der Kaubewegungen  $T_K$  und  $T_S$ ?

Lösung:

Allgemein gilt:

$$T = \frac{1}{f} \quad (5)$$

Daraus ergeben sich für die Periodendauern folgende Werte:

$$T_K = \frac{1}{f_K} = 0,8 \text{ s} \quad (6)$$

$$T_S = \frac{1}{f_S} = 0,5636 \text{ s} \approx 0,6 \text{ s} \quad (7)$$

c) Als einfaches Modell für die Kaubewegungen nehmen wir an, dass i) es sich um eine harmonische Schwingung des Kiefers handelt, ii) dass die Masse des Kiefers einem festen Anteil  $p$  der Gesamtmasse des Tieres entspricht ( $M_{\text{Kiefer}} = p \cdot M_{\text{Tier}}$ ) und iii) dass die Kaumuskulatur eine lineare Rückstellkraft mit einer Federkonstante  $K$  ausübt, wobei  $p$  und  $K$  für alle Tiere gleich sind. Was ist die Vorhersage des Modells für das Verhältnis  $f_K/f_S$ ?

Lösung:

Allgemein gilt für eine harmonische Schwingung:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8)$$

In unserem Fall bedeutet dies also:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{p \cdot M_{\text{Tier}}}} \propto \frac{1}{\sqrt{M_{\text{Tier}}}} \quad (9)$$

Daraus ergibt sich folgendes Frequenzverhältnis:

$$\frac{f_K}{f_S} = \sqrt{\frac{M_S}{M_K}} = \sqrt{\frac{31}{427}} = 0,26944 \approx 0,3 \quad (10)$$

d) Beschreibt das Modell die experimentellen Daten? Wie könnte man das Modell verbessern?

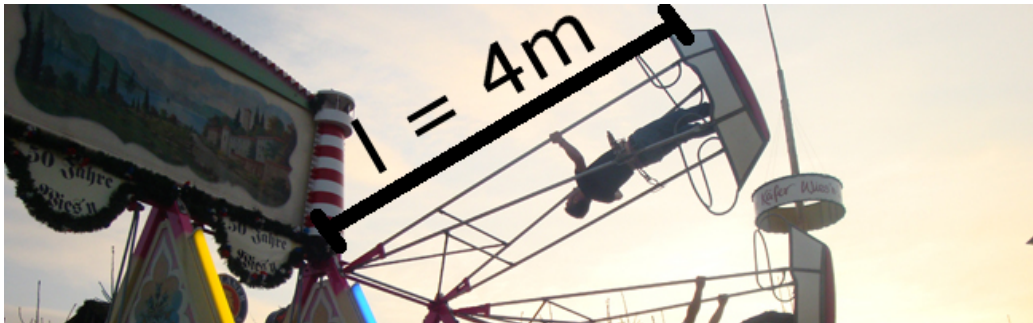
Lösung:

Das Modell kann zwar voraussagen, welches der betrachteten Tiere schneller kaut, jedoch scheitert es bei der Beschreibung, um welchen Faktor das Tier schneller kaut (d.h. Es kann sagen, dass das Schaf schneller als die Kuh kaut. Jedoch kann es nicht voraussagen, ob das Schaf 2, 3 oder 4 mal so schnell kaut). Es ist also nur eine qualitative Aussage, jedoch keine quantitative Aussage möglich.

Mögliche Verbesserungen für das Modell wären beispielsweise eine Berücksichtigung der Kieferanatomie, sowie eine genauere Untersuchung von  $p$  und  $k$  (z.B.  $p = p(m)$  und  $k = k(m)$ ).

## Aufgabe 2

**Wiesnschaukel:** Auf der Wiesn gibt es kleine Schiffschaukeln ( $l = 4,0 \text{ m}$ ), die von bis zu 2 Personen nur durch Gewichtsverlagerung angetrieben werden können (siehe Abbildung). Zunächst schaukelt nur Hans ( $m_H = 70,0 \text{ kg}$ ) auf der Schaukel ( $m_S = 125 \text{ kg}$ ). Nehmen sie an, die Schaukel startet aus der Ruhe  $2,0 \text{ m}$  über dem tiefsten Punkt der Schaukel und Hans. Sie können Reibungseffekte vernachlässigen.



- a) Wie groß ist seine Geschwindigkeit, wenn Hans den tiefsten Punkt erreicht?

Lösung:

Betrachte Energieerhaltung:

Zu Beginn:  $E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = 0 + m \cdot g \cdot h$

Am tiefsten Punkt:  $E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + 0$

Mit  $E_{ges} = \text{const}$  folgt:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ m}} = 6,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (11)$$

- b) Wie groß ist die Kraft, die auf die Aufhängung wirkt, wenn Hans den tiefsten Punkt erreicht?

Lösung:

$$F = F_G + F_Z = m \cdot g + \frac{m \cdot v^2}{r} = (m_H + m_S) \cdot \left( g + \frac{2gh}{R} \right) = \quad (12)$$

$$= (m_H + m_S) \cdot g \cdot \left( 1 + \frac{2h}{R} \right) = (70,0 \text{ kg} + 125 \text{ kg}) \cdot 9,81 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot 2 \text{ m}}{4 \text{ m}} \right) = \quad (13)$$

$$= 3,8 \text{ kN} \quad (14)$$

- c) Unter der Annahme, dass Sie das System als ideales (mathematisches) Pendel nähern können, wie lange dauert es, bis Hans vom Zeitpunkt an dem er den tiefsten Punkt erreicht, wieder in seiner Ausgangslage ankommt?

Lösung:

Für ein ideales Pendel gilt:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ .

Vom tiefsten Punkt bis zu Ausgangslage:  $\frac{3}{4}T$

$$t = \frac{3}{4} \cdot T = \frac{3}{4} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{4 \text{ m}}{9,81 \text{ kg m/s}^2}} = 3,0 \text{ s} \quad (15)$$

- d) Wie viel Energie müsste Hans durch Gewichtsverlagerung noch in die Schwingung stecken, damit er den Überschlag gerade eben schafft? Welcher Geschwindigkeit am tiefsten Punkt entspricht das und wie ändert sich nun die Kraft auf die Aufhängung?

Lösung:

Erforderliche Energie:  $E_{pot,d)}$  für  $h = 8,0 \text{ m}$  am höchsten Punkt.

$$\text{zusätzliche Energie: } E = E_{pot,d)} - E_{pot,a)} = m \cdot g \cdot (8 \text{ m} - 2 \text{ m}) = \quad (16)$$

$$= (70,0 \text{ kg} + 125 \text{ kg}) \cdot 9,81 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \cdot 6 \text{ m} = 11,48 \text{ kJ} \approx 11,5 \text{ kJ} \quad (17)$$

Geschwindigkeit: analog zu a)  $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \cdot 8,0 \text{ m}} = 12,53 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 13 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (18)$$

Kraft auf die Aufhängung: analog zu b)

$$F = (m_J + m_S) \cdot g \cdot \left(1 + \frac{2h}{R}\right) = \quad (19)$$

$$= (70,0 \text{ kg} + 125 \text{ kg}) \cdot 9,81 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot 8 \text{ m}}{4 \text{ m}}\right) = 9,56 \text{ kN} \quad (20)$$

- e) Wie ändern sich die Ergebnisse der ersten vier Teilaufgaben, wenn Hans Freund Thomas ( $m_T = 100 \text{ kg}$ ) zusätzlich mit auf der Schaukel steht?

Lösung:

Teilaufgabe a):  $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$  unabhängig von der Masse.  $\Rightarrow$  ändert sich nicht.

Teilaufgabe b): Die Kraft auf die Aufhängung ist proportional zur Masse. Wir können also entweder die Kraft mit der neuen Gesamtmasse erneut ausrechnen oder wir teilen die Kraft aus Teilaufgabe b) durch die alte Gesamtmasse und multiplizieren mit der neuen Gesamtmasse:

$$F_e) = F_b) \cdot \frac{m_H + m_S + m_T}{m_H + m_S} = 3,8 \text{ kN} \cdot \frac{295 \text{ kg}}{195 \text{ kg}} = 5,74 \text{ kN} \quad (21)$$

Teilaufgabe c):  $t = \frac{3}{4} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  unabhängig von der Masse.  $\Rightarrow$  ändert sich nicht.

Teilaufgabe d): Kraft auf die Aufhängung und zusätzlich benötigte Energie für den Überschlag beide proportional zur Masse:

$$F_e) = F_d) \cdot \frac{m_H + m_S + m_T}{m_H + m_S} = 9,56 \text{ kN} \cdot \frac{295 \text{ kg}}{195 \text{ kg}} = 14,46 \text{ kN} \approx 14,5 \text{ kN} \quad (22)$$

$$E_e) = E_d) \cdot \frac{m_H + m_S + m_T}{m_H + m_S} = 11,48 \text{ kJ} \cdot \frac{295 \text{ kg}}{195 \text{ kg}} = 17,37 \text{ kJ} \approx 17,4 \text{ kJ} \quad (23)$$

### Aufgabe 3

**Molekülschwingung:** In sogenannten Molekulardynamiksimulationen werden Atome als Punktmassen und chemische Bindungen als elastische Federn dargestellt. Wir betrachten hier ein Wasserstoffatom ( $m_H = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg), das über eine Einfachbindung an ein wesentlich schwereres Molekül gebunden ist. Wir können hier die Bewegung des größeren Moleküls vernachlässigen und die Einfachbindung als harmonische Feder mit der Federkonstanten (in den in Molekulardynamiksimulationen üblichen Einheiten)  $k_H = 140 \text{ \AA}^{-2} \cdot \frac{\text{kcal}}{\text{mol}}$  annehmen.

a) Geben Sie den Wert der Federkonstante  $k_H$  in SI Einheiten an.

Lösung:

$$k_H = 140 \text{ \AA}^{-2} \frac{\text{kcal}}{\text{mol}} \cdot \frac{4187 \text{ J}}{\text{kcal}} \cdot \frac{1 \text{ mol}}{6 \cdot 10^{23}} \cdot \left( \frac{10^{10} \text{ \AA}}{1 \text{ m}} \right)^2 = 97,696 \frac{\text{N}}{\text{m}} \approx 98,0 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (24)$$

b) Stellen Sie die Differentialgleichung der Bewegung auf und lösen Sie diese.

Lösung:

Da das Wasserstoffatom eine harmonische Schwingung durchführt, lautet die Bewegungsgleichung:

$$m_H \ddot{x} + k_H x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k_H}{m_H} x = 0 \quad (25)$$

Lösungsansatz der Differentialgleichung:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (26)$$

$$\dot{x}(t) = A \omega \cos(\omega t + \phi) \quad (27)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) \quad (28)$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert  $\omega^2 = \frac{k_H}{m_H}$ .

Die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt  $t = 0$  werden wie folgt gewählt:

$x_0$  sei der Gleichgewichtsabstand zwischen dem Molekül und dem Wasserstoffatom

$$x(0) = x_0 \quad (29)$$

Die Anfangsgeschwindigkeit sei 0

$$\dot{x}(0) = 0 \quad (30)$$

$$\Rightarrow x(0) = A \sin(\phi) = x_0 \quad (31)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(0) = A \omega \cos(\phi) = 0 \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \quad (32)$$

Eingesetzt in

$$x(0) = A \sin(\phi) = x_0 \quad (33)$$

$$\Rightarrow x_0 = A \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = A \quad (34)$$

Die Lösung der Bewegungsgleichung lautet also:

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (35)$$

- c) Was ist die Periodendauer der Schwingung des Wasserstoffatoms? Wie ändern sich die Periodendauer, wenn man anstelle von Wasserstoff nun Deuterium ( $m_D = 2m_H$ ) bzw. Tritium ( $m_T = 3m_H$ ) verwendet. (Hinweis: Hierbei können Sie für die Federkonstanten von Deuterium/Tritium folgendes annehmen:  $k_H = k_D = k_T$ )

Lösung:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_H}{m_H}} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{2\pi}{T_H} \quad (36)$$

$$\Rightarrow T_H = 2\pi \sqrt{\frac{m_H}{k_H}} \quad (37)$$

$$\Rightarrow T_H = 2\pi \sqrt{\frac{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{97,696 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} = 26,86124 \cdot 10^{-15} \text{ s} \approx 26,9 \text{ fs} \quad (38)$$

Die Periodendauer von Deuterium/Tritium kann analog zur Wasserstoff berechnet werden:

$$T_i = 2\pi \sqrt{\frac{m_i}{k_i}} \quad i \in D, H \quad (39)$$

$$\Rightarrow \frac{T_H}{T_i} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{m_H}{k_H}}}{2\pi \sqrt{\frac{m_i}{k_i}}} = \sqrt{\frac{m_H k_i}{m_i k_H}} \quad (40)$$

$$\Rightarrow T_i = T_H \sqrt{\frac{m_i k_H}{m_H k_i}} \quad (41)$$

$$\Rightarrow T_D = T_H \sqrt{\frac{m_D k_H}{m_H k_D}} = T_H \sqrt{\frac{2m_H k_H}{m_H k_H}} = T_H \sqrt{2} \approx 38,0 \text{ fs} \quad (42)$$

$$\Rightarrow T_T = T_H \sqrt{3} \approx 46,5 \text{ fs} \quad (43)$$

Hinweis: Sie können die Werte auch direkt in (39) einsetzen. Die nachfolgenden Umformungen sind nicht notwendig.

- d) In Molekulardynamiksimulationen werden die Newton'schen Bewegungsgleichungen numerisch gelöst, indem man die Zeit in kleine Intervalle (sogenannte Zeitschritte)  $\delta t$  einteilt und für jeden Zeitschritt nacheinander die aktuellen Positionen der Atome berechnet. Als Faustregel muss man  $\delta t$  dabei so wählen, dass der Integrationsschritt mindestens

10 mal kleiner ist als die kürzeste Schwingungsperiode im simulierten System. Was für einen Integrationszeitschritt muss man nehmen, wenn wir davon ausgehen, dass die oben berechnete Wasserstoffschwingung die kürzeste Schwingungsperiode im simulierten System ist? Wie viele Integrationschritte muss man berechnen, um insgesamt 1 ns zu simulieren? Wie viele Schritte werden benötigt, um 1 ms zu simulieren?

Lösung:

$\delta t$  soll maximal  $\frac{1}{10}$  der kürzesten Schwingungsperiode  $T_H$  sein:

$$\delta t = \frac{T_H}{10} = 2,43 \cdot 10^{-15} \text{ s} \quad (44)$$

Integrationschritte für 1 ns:

$$N = \frac{1 \text{ ns}}{\delta t} = \frac{1 \cdot 10^{-9} \text{ s}}{2,43 \cdot 10^{-15} \text{ s}} = 4,1153 \cdot 10^5 \approx 4 \cdot 10^5 \quad (45)$$

Integrationschritte für 1 ms:

$$N = \frac{1 \text{ ms}}{\delta t} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ s}}{2,43 \cdot 10^{-15} \text{ s}} = 4,1153 \cdot 10^{11} \approx 4 \cdot 10^{11} \quad (46)$$

#### Aufgabe 4

##### Handypendel:

- a) Messen Sie die Periodendauer  $T$  mit der App für drei verschiedene Pendellängen  $l$ .  
Lösung:

Im Folgenden sind 5 mögliche Werte für 5 verschiedene Pendellängen gegeben:

Länge des Pendels in m	0,20	0,4	0,60	0,80	1,00
Periodendauer in s	0,90	1,27	1,55	1,79	2,01

- b) Tragen Sie die gemessenen Periodendauern gegen die Länge auf.  
Lösung:

Die folgende Graphik zeigt die Werte der Tabelle (Länge des Pendels gegen die Periodendauer  $T$  in s):

- c) Was für einen physikalischen Zusammenhang erkennen Sie?  
Lösung:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (47)$$

Wir bekommen die Formel mit folgenden Annahmen:

$$a = \ddot{x}(t) = \frac{F_{G,tan}}{m} \quad (48)$$

$$F_{G,tan} = F_G \cdot \sin(\phi) \approx -m \cdot g \cdot \phi \text{ tangentielle Gravitationskraft} \quad (49)$$

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\text{Kreisbogen}}{\text{Kreisumfang}} = \frac{x}{2\pi l} \quad (50)$$

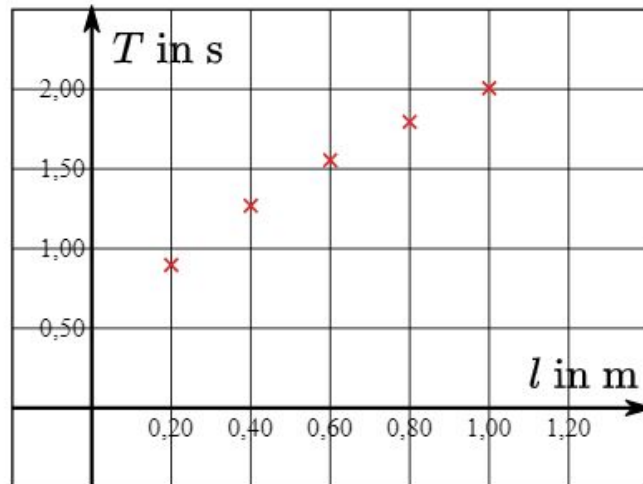


Abbildung 1: Periodendauer für verschiedene Pendellängen

Wo wir unter anderem die Kleinwinkelnäherung benutzt haben. Umstellen ergibt:

$$\phi = \frac{x}{l} = \frac{x(t)}{l} \quad (51)$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_{G,tan}}{m} \approx \frac{-mg \sin(\phi)}{m} = \frac{-g}{l} \cdot x(t) \quad (52)$$

Wir bekommen für die Winkelfrequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{T} \quad (53)$$