

Lösungen zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Quadratische Gleichungen. Die allgemeine Lösungsstrategie ist hier die Gleichung auf die Form der „p-q-Formel“ zu bringen, d.h. $x^2 + px + q = 0$; die Gleichung hat dann die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Im Allgemeinen haben quadratische Gleichungen zwei Lösungen, wobei die Lösungen komplexe Zahlen sein können. Wir beschäftigen uns aber meistens mit dem Fall, dass die Lösungen reelle Zahlen sind. Die Lösungen können auch zusammenfallen, in diesem Fall ist $x_1 = x_2$.

a) $-x^2 - 11x + 10 = 0 \Rightarrow$ umstellen: $x^2 + 11x - 10 = 0 \Rightarrow$ Einsetzen in die p-q-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{161}{4}} \Rightarrow x_1 = -\frac{11}{2} + \sqrt{\frac{161}{4}} \approx 0.84 \text{ und } x_2 = -\frac{11}{2} - \sqrt{\frac{161}{4}} \approx -11.84$$

b) $5x^2 - 15x + 5 = -7 \Rightarrow$ durch 5 dividieren und umstellen: $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\rightarrow x_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow x_1 = 2 \text{ und } x_2 = 1$$

c) $x^2 - 8x + 14 = 0 \Rightarrow$ Einsetzen in die p-q-Formel: $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{2} \Rightarrow x_1 = 4 + \sqrt{2}, x_2 = 4 - \sqrt{2}$

Aufgabe 2

Kurvendiskussion.

a) Nullstellen $f(x) = 3 \cdot (e^{2x_0} - 5) = 0$

$$\Rightarrow (e^{2x_0} - 5) = 0 \Rightarrow e^{2x_0} = 5 \Rightarrow 2x_0 = \ln(5) \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2} \ln(5)$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -15$

Für positive Werte für x dominiert die Exponentialfunktion. Für negative Werte für x wird die Exponentialfunktion klein und der -5 Term dominiert.

c) Zur Bestimmung von Extremwerten müssen wir die erste Ableitung $f'(x)$ ausrechnen und Null setzen: $f'(x) = 6 \cdot e^{2x} = 0 \Rightarrow$ hat keine Lösung also auch keine Extremwerte für endliche x .

Allgemein:

Für Maximum gilt: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$

Für Minimum gilt: $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$

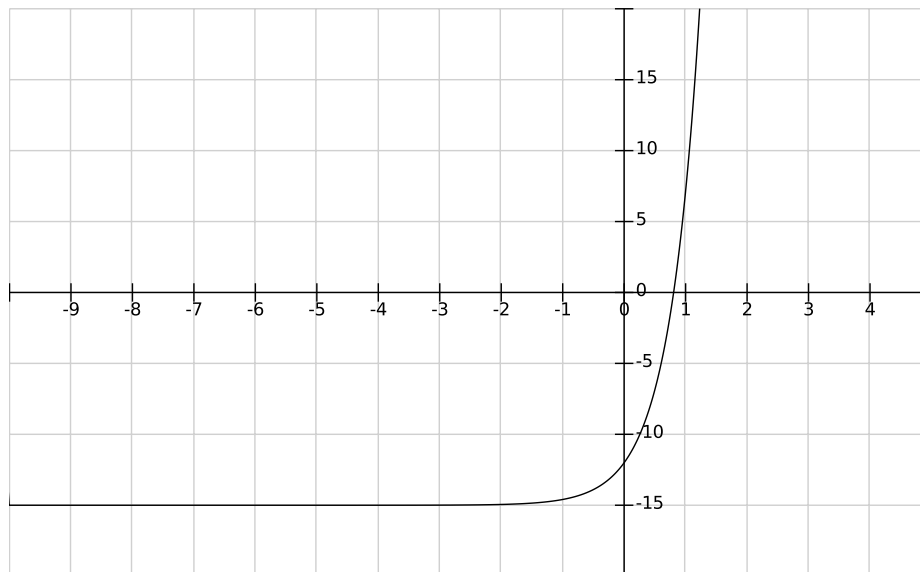
d) Allgemein:

Für Streng monoton steigend gilt: $f'(x) > 0$

Für Streng monoton fallend gilt: $f'(x) < 0$

Aus der Teilaufgabe zuvor wissen wir, dass $f'(x) = 6e^{2x} > 0$ und die Funktion somit streng monoton steigend für alle x ist.

e) Skizze der Funktion $f(x)$:

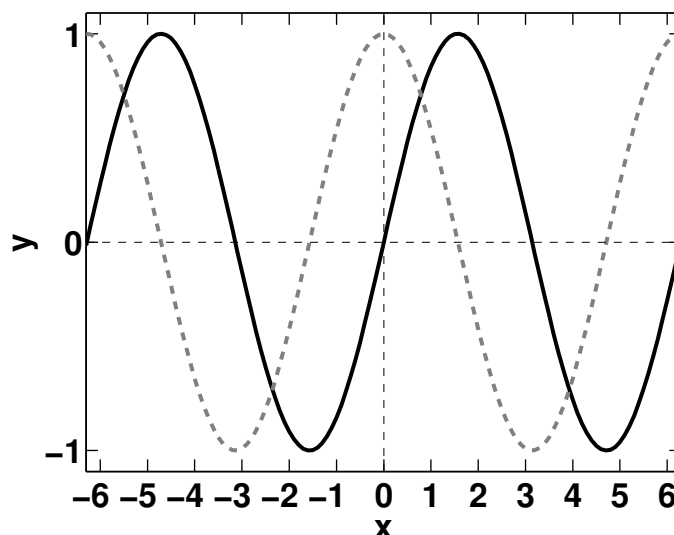


Randbemerkung: Die angegebene Funktion $f(x)$ hat die gleiche funktionelle Form wie die Shockley-Gleichung für den Strom durch eine Diode als Funktion der Spannung. Diese Gleichung wird uns, zumindest qualitativ im zweiten Semester begegnen.

Aufgabe 3

Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen) I.

a) $\sin(x)$ (schwarze, durchgezogene Linie) und $\cos(x)$ (graue, gestrichelte Linie):



b) $\sin(x)$: Nullstellen bei $n\pi$, Maxima bei $(4n + 1)\frac{\pi}{2}$, Minima bei $(4n + 3)\frac{\pi}{2}$.
 $\cos(x)$: Nullstellen bei $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$, Maxima bei $2\pi n$, Minima bei $(2n + 1)\pi$.
 wobei n aus den ganzen Zahlen ist, d.h. $n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$

c)

$$\sin \alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right); \quad \cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

d) Erste und zweite Ableitung der Funktion $f(x) = 3 \cdot \cos(4x - 2) + 7 \cdot \sin(4x)$:

$$f'(x) = -12 \cdot \sin(4x - 2) + 28 \cdot \cos(4x); \quad f''(x) = -48 \cdot \cos(4x - 2) - 112 \cdot \sin(4x)$$

Aufgabe 4

Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen) II.

a) Umrechnung von Grad und Bogenmaß:

$$\text{Grad} = \text{Bogenmaß} \cdot 180^\circ / \pi$$

$$\text{Bogenmaß} = \text{Grad} \cdot \pi / 180^\circ$$

$$1 \text{ rad} \approx 57,29^\circ; \quad 2\pi \text{ rad} = 360^\circ.$$

$$\theta_1 = 30^\circ \approx 0,52 \text{ rad}$$

$$\theta_2 = 1^\circ \approx 0,0175 \text{ rad}$$

$$\theta_3 = 0,1^\circ \approx 0,00175 \text{ rad}$$

b) Kleinwinkelnäherung: Definiere den relativen Fehler $r = \left| \frac{\theta - \sin(\theta)}{\sin(\theta)} \right|$ wobei θ im Bogenmaß angegeben wird:

$$\text{Für } \theta_1 : \sin(\theta_1) = 0,50 \text{ und } r_1 = 0,045 \text{ oder } 4,5\%$$

$$\text{Für } \theta_2 : \sin(\theta_2) = 0,0175 \text{ und } r_2 = 5,1 \cdot 10^{-5} \text{ oder } 0,005\% \text{ (Zur Berechnung muss man die weiteren Nachkommastellen berücksichtigen)}$$

$$\text{Für } \theta_3 : \sin(\theta_3) = 0,00175 \text{ und } r_3 = 5,1 \cdot 10^{-7} \text{ oder } 0,00005\%$$

Man beachte, dass die Näherung bei kleineren Winkeln umso besser ist!

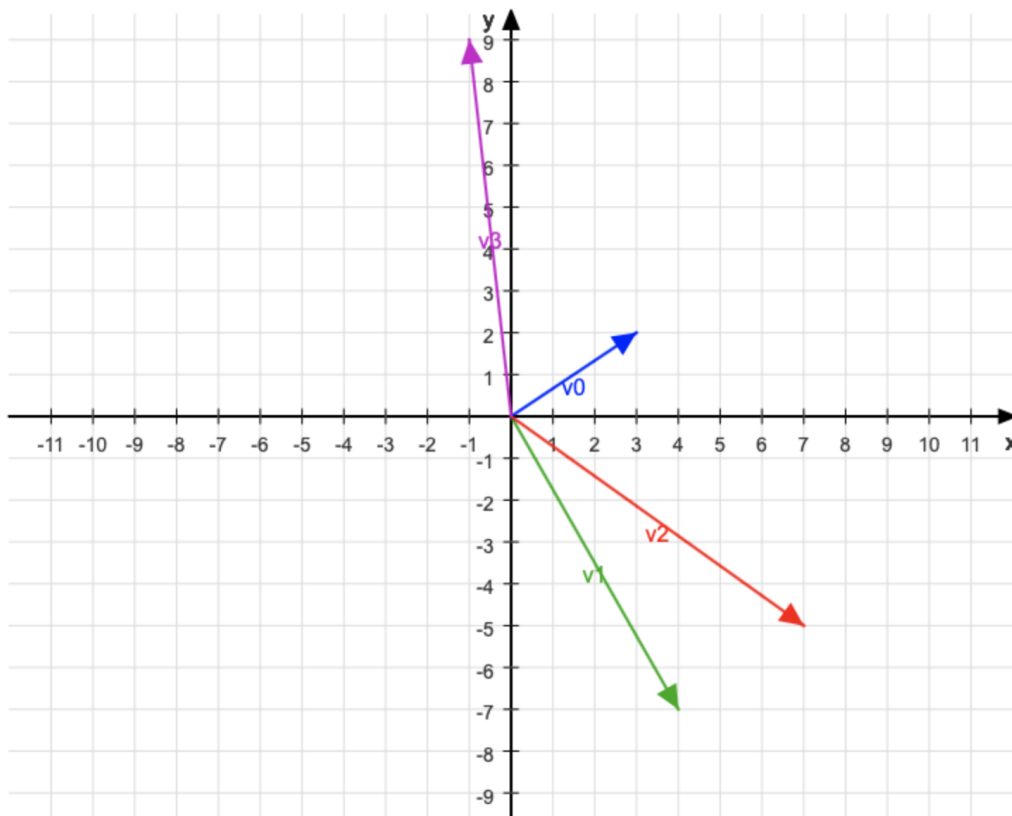
c)

$$\sin \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \sin \alpha = 4 \text{ m} \cdot \sin(30^\circ) = 2 \text{ m}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \cos \alpha = 4 \text{ m} \cdot \cos(30^\circ) = 2 * \sqrt{3} \text{ m} \approx 3,46 \text{ m}$$

Aufgabe 5

a) Einzeichnen in ein Koordinatensystem:



b) Summe und Differenz:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 \\ 2+(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ 2-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

c) Multiplikation mit einem Skalar:

$$\lambda_1 \cdot v_0 = -2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 \cdot v_1 = 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -35 \end{pmatrix}$$

d) Betrag von \vec{v}

$$\|v_1\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (v_{1,i})^2} = \sqrt{(4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{65}$$

e) Skalarprodukt:

$$v_0 \cdot v_1 = v_{0,x} v_{1,x} + v_{0,y} v_{1,y} = (3) \cdot (4) + (2) \cdot (-7) = 12 - 14 = -2$$

Es gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ entweder falls einer der beiden Vektoren oder beide Vektoren $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind (triviale Lösung) oder falls die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen (dieser Zusammenhang ist bei der Lösung vieler physikalischer Probleme wichtig)!