Übungsblatt 7
Besprechung in der Woche vom 11.1.2021

Aufgabe 1

Pirouette.
Eine 1,60 Meter große, 55 Kilogramm schwere Eiskunstläuferin macht eine Pirouette auf der Eisfläche mit parallel zum Boden ausgebreiteten Armen, dabei dreht sie sich dreimal pro Sekunde um die eigene Achse. (https://www.youtube.com/watch?v=UrBwRopCm3g ab 3:53)

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Eiskunstläuferin. Nehmen Sie dazu an, dass der Körper der Sportlerin zylinderförmig mit einem Durchmesser von D = 30 cm ist. 90% ihres Körpergewichts sind homogen in dem Zylinder verteilt. Die restlichen 10% fallen auf die Arme und können durch zwei gleich schwere Punktmassen im Abstand s = 70 cm zur Rotationsachse genähert werden.

Lösung:

Die Masse des Körpers beträgt $M = 0.9 \cdot m_{ges} = 49.5\,\text{kg}$ und die Masse der Arme gemäß Modell $m = 0.1 \cdot m_{ges} = 5.5\,\text{kg}$. Somit ergibt sich mithilfe des Satzes von Steiner ein Trägheitsmoment von:

$$I_{ges} = I_{Zylinder} + I_{Punktmasse} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 + m \cdot s^2 \approx 3.25\,\text{kg}\,\text{m}^2 \tag{1}$$

b) Die Eiskunstläuferin legt nun die Arme an den Körper an. Dadurch verkleinert sich der Abstand der Punktmassen auf 30 cm. Berechnen Sie das neue Trägheitsmoment I' der Sportlerin.

Lösung:

Der einzige Unterschied zum Ergebnis zu a) ist, dass der neue Abstand der Punktmassen s' beträgt. Damit erhält man ein neues Trägheitsmoment von:

$$I'_{ges} = J_{Zylinder} + I'_{Punktmasse} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 + m \cdot s'^2 \approx 1.05\,\text{kg}\,\text{m}^2 \tag{2}$$

c) Bestimmen Sie nun die neue Pirouettenfrequenz.

Lösung:

Um die neue Pirouttenfrequenz zu bestimmen, verwenden wir die Drehimpulserhaltung:

$$L = L' \leftrightarrow I \cdot \omega = I' \cdot \omega' \tag{3}$$

$$\text{mit } \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \rightarrow f' = \frac{I_{ges} \cdot f}{I'_{ges}} \approx 9.29\,\text{Hz} \tag{4}$$

Aufgabe 2

Rotation von Molekülen.
Die Rotation von Molekülen erlaubt es, Aussagen über ihre Struktur zu machen. Als Beispiel dient das zweiatomige Molekül HCl (Salzsäuregas). Die Massen der beiden Atome sind in Einheiten der atomaren Masseneinheit u angegeben: $m_H = 1\,\mathrm{u}$, $m_{Cl} = 35\,\mathrm{u}$, $1\mathrm{u} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Der Abstand zwischen dem H-Atom und dem Cl-Atom beträgt $d_{HCl} = 1{,}28 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}$.

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des HCl Moleküls bezüglich einer Drehachse, die senkrecht zur Verbindungslinie zwischen den beiden Atomen verläuft und durch den räumlichen Mittelpunkt des Moleküls verläuft.

Lösung:

Für einzelne Massenpunkte (hier das Cl-Atom und das Wasserstoffatom) berechnet sich das Trägheitsmoment wie folgt:

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \tag{5}$$

Der räumliche Mittelpunkt beträgt: $r_1 = r_2 = \frac{d_{HCl}}{2}$

$$\rightarrow I = m_{Cl} \cdot \left(\frac{d_{HCl}}{2}\right)^2 + m_H \cdot \left(\frac{d_{HCl}}{2}\right)^2 = (m_{Cl} + m_H) \cdot \left(\frac{d_{HCl}}{2}\right)^2 \tag{6}$$

$$= (35 + 1) \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{1{,}28 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}}{2}\right)^2 \approx 2{,}45 \cdot 10^{-46}\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{7}$$

b) Der Drehimpuls des HCl-Moleküls betrage $|\vec{L}| = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\mathrm{Js}$. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω und die Umdrehungszeit T des HCl-Moleküls für die von Ihnen unter a) ermittelten Werte des Trägheitsmomentes. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem experimentell beobachteten Wert der Frequenz $f_{exp} = 6{,}25 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Hz}$. Machen Sie danach eine Aussage über die reale Drehachse des Moleküls und berechnen Sie das reale Drehmoment I_{real}.

Lösung:

Die aus dem Drehimpuls berechnete Winkelgeschwindigkeit beträgt:

$$|\vec{L}| = |\vec{I}| \cdot \omega \rightarrow \omega = \frac{|\vec{L}|}{|\vec{I}|} = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}\mathrm{Js}}{2{,}45 \cdot 10^{-46}\,\mathrm{kg\,m^2}} \approx 4{,}29 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Hz} \tag{8}$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4{,}29 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Hz}} \approx 1{,}46 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s} \tag{9}$$

$$\rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4{,}29 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Hz}}{2\pi} \approx 6{,}82 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Hz} \tag{10}$$

Die Frequenz beträgt also ca. $\frac{1}{10}$ von f_{exp}, da die reale Drehachse viel näher am Cl-Atom liegt, also $r_H = \frac{35}{36} \cdot d_{HCl}$ und $r_{Cl} = \frac{1}{36} \cdot d_{HCl}$ (Abstand vom gemeinsamen Schwerpunkt).

$$\rightarrow I_{real} = m_{Cl} \cdot r_{Cl}^2 + m_H \cdot r_H^2$$
$$= 35 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{1 \cdot 1{,}28 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}}{36}\right)^2 + 1 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{35 \cdot 1{,}28 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}}{36}\right)^2 \approx 2{,}64 \cdot 10^{-47}\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{11}$$

Aufgabe 3

Der Brunnen:
Ein Wassereimer ($m = 15$ kg) hängt an einem Seil ($l = 6$ m), das um die Welle ($R = 8$ cm) eines Handrades gewickelt ist. Das Rad und die Welle haben zusammen einen Trägheitsmoment von $J_{Rad} = 3\ kg \cdot m^2$. Gerade als der volle Eimer oben angekommen ist wird die Kurbel plötzlich losgelassen und der Eimer fällt in den Brunnen. Welche Geschwindigkeit hat der Eimer erreicht als sich das Seil komplett abgewickelt hat?

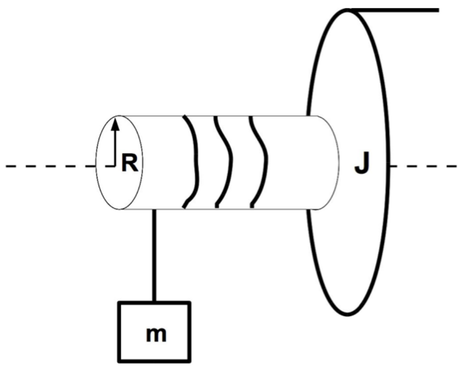

Abbildung 1: Das Förderrad des Brunnens

Lösung:
Durch die Gewichtskraft am Eimer wird einerseits der Eimer selbst beschleunigt, außerdem Wirkt eine Kraft welche dafür sorgt, dass die Rolle beschleunigt wird. Es gilt also $F_g = F_{Eimer} + F_{Rolle}$.

$$F_g = m \cdot g$$
$$F_{Eimer} = m \cdot a$$
$$F_{Rolle} \cdot R = M = J \cdot \alpha$$
$$M = \text{Drehmoment}$$
$$J = \text{Trägheitsmoment}$$
$$\alpha = \frac{a}{r} = \text{Winkelbeschleunigung}$$
$$\rightarrow m \cdot g = m \cdot a + \frac{J \cdot \alpha}{R}$$
$$m \cdot g = m \cdot a + \frac{J \cdot a}{R^2}$$
$$a = \frac{m \cdot g}{m + \frac{J}{R^2}}$$

Bei gleichförmiger Beschleunigung gilt $s = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$, und $v = a \cdot t$

$$\rightarrow v = \sqrt{2 \cdot s \cdot a}$$

Jetzt die Beschleunigung und die Länge des Seils einsetzen ergibt:

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot l}{m + \frac{J}{R^2}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6\ \mathrm{m} \cdot 15\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\frac{3\ \mathrm{kg\ m}^2}{(0{,}08\ \mathrm{m})^2} + 15\ \mathrm{kg}}} = 1{,}91\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

alternative Lösung über die Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} E_{pot} &= E_{kin} + E_{rot} \\ m \cdot g \cdot l &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 \\ m \cdot g \cdot l &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot (\frac{v}{R})^2 \\ \rightarrow v &= \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot l}{m + \frac{J}{R^2}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6 \text{ m} \cdot 15 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\frac{3 \text{ kg m}^2}{(0{,}08 \text{ m})^2} + 15 \text{ kg}}} = 1,91 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Stromausfall:
Der Supercomputer SuperMUC, der im Leibnitz Rechenzentrum in München steht, nimmt eine Leistung von 3500 kW auf. Fällt der Strom aus, muss eine Zeit von Δt = 10 s bis zum Anlaufen des Notstromgenerators überbrückt werden.

a) Wie viele Menschen (m_{Mensch} = 75 kg) könnt man mit der Energie, die für die Überbrückung dieser 10 s notwendig ist, vom Meeresspiegel auf den Mount Everest (8848 m) schießen? Die Luftreibung ist hierbei zu vernachlässigen.

Lösung:
Leistung P und Energie E hängen folgendermaßen zusammen:
$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \rightarrow \Delta E = P \cdot \Delta t = 3,5 \cdot 10^7$ J
Um eine Menschen auf den Mount Everest zu schießen wird die Energie $E_{Everest} = m \cdot g \cdot h = 6,5 \cdot 10^6$ J benötigt.
$\frac{\Delta E}{E_{Everest}} = 5,4 \rightarrow$ Man könnte 5 Menschen auf den Mount Everest schießen.

b) Mit welcher Geschwindigkeit müsste ein schwerer LKW (m_{LKW} = 40 t) fahren, um diese Energie in Form von kinetischer Energie zu besitzen?

Lösung:
$E_{kinLKW} = m_{LKW}\ v^2_{LKW} \stackrel{!}{=} \Delta E \rightarrow v_{LKW} = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta E}{m_{LKW}}} = 42 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 151 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

c) Um die Zeit bis der Generator anspringt zu überbrücken benutzten wir eine zylindrische Schwungscheibe (m_S = 700 kg) aus Stahl, mit einem Radius von r = 1 m. Das Trägheitsmoment ist durch $J_S = \frac{1}{2}mr^2$ gegeben. Die Scheibe wird auf 6000 Umdrehungen pro Minute beschleunigt. Reicht die gespeicherte Energie aus, den Supercomputer so lange zu versorgen?

Lösung:
Die Energie der Scheibe berechnet sich über:

$$\begin{aligned} E_{rot} &= \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot (2\pi \cdot f)^2 \\ E_{rot} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 700 \text{ kg} \cdot (1 \text{ m})^2 \cdot (2\pi \cdot \frac{6000}{60})^2 = 6,9 \cdot 10^7 \text{ J} \end{aligned}$$

$\rightarrow E_{rot} > \Delta E$ Damit reicht die in der Scheibe gespeicherte Energie aus, um den SuperMUC zu versorgen bis der Generator anspringt.