Lösungen zu Übungsblatt 6

Aufgabe 1

ISS Versorgungsflug Die ISS Raumstation muss regelmäßig versorgt werden. Ein bekanntes amerikanisches Raumfahrunternehmen bietet hierfür Flüge mit einer Ihrer Raketen an. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, dass es sich bei der verwendeten Rakete um ein einstufiges Modell handelt und der Luftwiderstand sowie die Gravitationsbeschleunigung vernachlässigt werden können. Die Masse der ersten Rakete sei 450.000 kg, wobei 88 % davon Treibstoff ist, der mit einer Geschwindigkeit von $4,5\,\mathrm{km/s}$ ausgestoßen wird.

a) Welche Endgeschwindigkeit kann die Rakete erreichen?
Lösung:
In der Vorlesung wurde die Raketengleichung gegeben, die eine Beziehung zwischen Endgeschwindigkeit der Rakete und Ausstoßgeschwindigkeit des Treibstoffs sowie den beteiligten Massen herstellt. In diese brauchen wir nur einzusetzen:

$$v_{max} = v_{Tr} \cdot \ln \frac{m_R}{m_n} = 4,5\mathrm{km/s} \cdot \ln \left(\frac{m_r}{m_r(1-0.88)} \right) = 9541\mathrm{m/s} \tag{1}$$

mit
m_R: Startmasse der Rakete
m_n: Leermasse der Rakete.

b) Die Rakete benötigt 162s um den gesamten Treibstoff auszustoßen. Der Schub wird dabei konstant gehalten. Geben sie die Geschwindigkeit der Rakete als Funktion der Zeit an. Welche Beschleunigung wirkt dabei auf einen Astronauten, der mit dieser Rakete mitfliegt? (in Einheiten von g)
Lösung:
Nun zur Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit. In der Raketenformel ändert sich je nach Flugdauer die Nutzlast und der Treibstoff. Im Zähler des Logarithmus spielt das keine Rolle, weil beide addiert werden, hier muss also immer die gleiche Anfangsmasse eingesetzt werden. Im Nenner steht nun aber die Nutzlast. Für diese müssen wir noch einen zeitabhängigen Ausdruck finden, der widerspiegelt, dass ein Teil des Treibstoffs zur Nutzlast beiträgt, wenn die 162 sekunden noch nicht vorüber sind.

$$m_n(t) = m_R - m_{Tr} \cdot \frac{t}{T} = m_R \cdot (1 - 0,88\frac{t}{T}) \tag{2}$$

mit $T = 162s$ und gesamter Masse des Treibstoffs $m_{Tr} = 0,88 \cdot m_R$.

$$v(t) = v_{Tr} \cdot \ln \left(\frac{m_R}{m_n(t)} \right) = v_{Tr} \cdot \ln \left(\frac{m_R}{m_R \cdot (1 - 0,88\frac{t}{T})} \right) = 4,5\mathrm{km/s} \cdot \ln \left(\frac{1}{1 - 0,88 \cdot \frac{t}{162s}} \right) \tag{3}$$

Diese Formel spiegelt also den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit wieder. Die Ausstoßgeschwindigkeit ist ein Vorfaktor der die Funktion nur skaliert, an ihrem qualitativen Verlauf ändert der nichts. Die Beschleunigung, die auf den Astronauten wirkt, ist gleich der änderung der Geschwindigkeit:

$$a = \dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t} = 4.5\text{km/s} \cdot \frac{0,88/162\text{s}}{1-(0,88/162\text{s})t} \tag{4}$$

Uns interessiert nun das Maximum dieser Funktion während der Brenndauer. Wir sehen sofort, dass die Beschleunigung am Ende der Brennzeit maximal ist. Dies ist intuitiv erkenntlich, da dort die zu beschleunigende Masse am geringsten ist, aber weiterhin ein konstanter Schub erzeugt wird. Mit $t = 162\text{s}$ erhalten wir:

$$\frac{a}{g} = 4500\text{m/s} \cdot \frac{0,88}{0,12 \cdot 162\text{s}} \cdot \frac{1}{g} = 20,77 \tag{5}$$

Also rund das Zwanzigfache der Erdbeschleunigung. Dies könnte ein Astronaut nicht überleben. In der Realität wirkt der Rakete jedoch noch der Luftwiderstand entgegen, sodass die tatsächlich auftretenden 'g-Kräfte' deutlich geringer ausfallen. Im Vergleich dazu erhält man direkt zum Start, wo der Luftwiderstand noch vernachlässigbar ist, nur ein verhältniss von $a/g \approx 2,5$ (unter Vernachlässigung der Erdbeschleunigung).

c) Für Raketen wird häufig Flüssigtreibstoff verwendet, beispielsweise eine Mischung aus Sauerstoff und Wasserstoff. Damit können große Triebwerke betrieben werden, die den benötigten Schub liefern um die Atmosphäre zu verlassen. Außerhalb der Atmosphäre bieten sich Ionentriebwerke an, bei denen Gase zunächst in dem Triebwerk beschleunigt und dann mit hoher Geschwindigkeit ausgestoßen werden. Warum verwenden diese Triebwerke das verhältnismäßig teure Gas Xenon anstelle von bspw. Neon?

Lösung:
Wir betrachten die beiden Gleichungen für die Kinetische Energie und den Impuls der Xenon Gasteilchen:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \tag{6}$$

$$p = mv \tag{7}$$

Wie wir sehen sind beide Gleichungen Linear in m, die kinetische Energie jedoch quadratisch in v. Wir können uns nun überlegen, welchen Impuls wir bei einer gegeben Energie erhalten können:

$$p(E) = m \cdot \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{2Em} \tag{8}$$

Wir sehen hier also direkt den Vorteil von schweren Teilchen: Sie können bei gleicher kinetischer Energie mehr Schub erzeugen und verbauchen somit bei gleichem Schub weniger Strom als Beschleuniger mit leichteren Atomen.

Aufgabe 2

ISS Versorgungsflug - Fortsetzung. In der Realität wird eine Rakete in einer ähnlichen Größenordnung wie aus Aufgabe 1 verwendet, um eine Raumfähre in einen Orbit zu bringen. Diese kann dann an die ISS andocken, um Ihre Fracht abzuliefern. Wir wollen dabei das Koordinatensystem benutzen, in dem die ISS am Anfang in Ruhe ist und annehmen, dass sich die Raumfähre mit einer relativen Geschwindigkeit von $0,1\,\text{m/s}$ an die ISS annähert. Die Massen der Raumfähre und der ISS seien $25.000\,\text{kg}$ und $450.000\,\text{kg}$.

a) Welche Geschwindigkeit hat das Raumfähren-ISS-Gespann, wenn erfolgreich angedockt wurde? *Hinweis:* Hier handelt es sich um einem unelastischen Stoß. Warum?
Lösung:

Wir sollen von einem inelastischen Stoß ausgehen (die beiden Raumfahrzeuge sind nach dem Dockvorgang miteinander verbunden), können das Problem eindimensional beschreiben und verwenden deswegen die in der Vorlesung hergeleitete Formel für die Geschwindigkeit nach einem vollständig inelastischen Stoß:

$$v_{\text{Gespann}} = \frac{m_{\text{RF}} \cdot v_{\text{RF}}}{m_{\text{RF}} + m_{\text{ISS}}} = \frac{25.000kg \cdot 0,1m/s}{25.000kg + 450.000kg} \approx 0,0053m/s \tag{9}$$

mit
m_{RF}: Masse der Raumfähre
m_{ISS}: Masse der ISS.

b) Betrachten sie die gesamte kinetische Energie vor und nach dem Stoß. Ist dies verträglich mit der Energieerhaltung?
Lösung:
Die kinetischen Energien vorher und nachher lassen sich mit den bekannten Größen berechnen.

$$E_{kin,vorher} = E_{kin,RF} + E_{kin,ISS} \tag{10}$$

$$E_{kin,nachher} = E_{kin,Gespann} \tag{11}$$

$$E_{kin,RF} = \frac{1}{2} \cdot m_{RF} \cdot v_{RF}^2 = \frac{1}{2} \cdot 25.000kg \cdot (0,1m/s)^2 = 125J \tag{12}$$

$$E_{kin,ISS} = 0J \tag{13}$$

$$\Longrightarrow E_{kin,vorher} = 125J \tag{14}$$

$$E_{kin,Gespann} = \frac{1}{2} \cdot (25.000kg + 450.000kg) \cdot (0.053m/s)^2 \approx 6,67J \tag{15}$$

Wir erkennen eindeutig, dass $E_{\text{kin, nachher}} < E_{\text{kin, vorher}}$. Dies ist ein scheinbarer Widerspruch zur Energieerhaltung. Beim inelastischen Stoß geht die Energie jedoch *nicht verloren*, sondern wird in andere Energieformen *umgewandelt*, wie beispielsweise die innere Energie U. Im Allgemeinen gilt das Prinzip der Energieerhaltung also weiterhin.

c) Welche Geschwindigkeit haben die Raumfähre und die ISS, wenn das Andocken fehlgeschlagen ist? Nehmen Sie hierfür an, dass ein fehlgeschlagenes Manöver zu einem vollständig elastischen Stoß führt.
Lösung:
Wir benutzen die Formeln aus der Vorlesung für einen vollständig elastischen Stoß:

$$u_{\text{RF}} = \frac{m_{\text{RF}} - m_{\text{ISS}}}{m_{\text{RF}} + m_{\text{ISS}}} \cdot v_{\text{RF}} = \frac{25.000kg - 450.000kg}{25.000kg + 450.000kg} \cdot 0,1m/s \approx -0.089m/s \tag{16}$$

$$u_{\text{ISS}} = \frac{2 \cdot m_{\text{RF}}}{m_{\text{RF}} + m_{\text{ISS}}} \cdot v_{\text{RF}} = \frac{2 \cdot 25.000kg}{25.000kg + 450.000kg} \cdot 0,1 \text{ m/s} \approx 0,011 \text{ m/s} \tag{17}$$

Aufgabe 3

Impulserhaltung an der Uni. Zwei Personen der Massen m_1 und m_2 und den Geschwindigkeiten $|v_1| = |v_2| = 15$ km/h rennen in der Universität auf dem Flur frontal ineinander. Beim Aufprallen halten sich die Personen aneinander fest und bewegen sich gemeinsam weiter. Wie groß ist die Geschwindigkeit der beiden Personen nach dem Stoß bei einem Massenverhältnis von:

a) 1 : 1 (Student gegen Student)

b) 2 : 1 (Technischer Assistent gegen Student)

c) 10 : 1 (Sehr dicker Professor gegen Student)

d) in welche Richtung bewegen sich die Personen in den jeweiligen Fällen?

e) Was passiert im Fall c), wenn sich die Personen nicht aneinander festhalten (der Bauch des Professors ist perfekt elastisch). Welche Geschwindigkeit hat der Student nach dem Zusammenstoß?
Lösung:
Inelastischer Stoß: Alle Massen bewegen sich als Eine einzige, mit der Geschwindigkeit v', weiter.

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v' \tag{18}$$

$$\Rightarrow v' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{(m_1 + m_2)} \tag{19}$$

Elastischer Stoß: Alle Massen bewegen sich nach dem Stoß mit verschiedenen Geschwindigkeiten weiter. Zur Lösung benötigen wir Energie- und Impulserhaltung:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \tag{20}$$

$$\frac{m_1}{2} \cdot v_1^2 + \frac{m_2}{2} \cdot v_2^2 = \frac{m_1}{2} \cdot v_1'^2 + \frac{m_2}{2} \cdot v_2'^2 \tag{21}$$

$$\Rightarrow v_1' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot (2v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \tag{22}$$

$$\Rightarrow v_2' = \frac{m_2 \cdot v_2 + m_1 \cdot (2v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \tag{23}$$

a) Personen halten sich fest: Stoß ist unelastisch aus (19) folgt: $v' = 0$

b) aus (19) folgt: $v' = \frac{v}{3} = 5\frac{km}{h}$

c) aus (19) folgt: $v' = \frac{9 \cdot v}{11} = 12,27\frac{km}{h}$

d) jeweils in die Richtung der größeren Masse

e) aus (22) folgt: $v_{Prof} = \frac{7 \cdot v}{11} = 9,54\frac{km}{h}$ und aus (23) folgt: $v_{Student} = \frac{-29 \cdot v}{11} = -39,54\frac{km}{h}$

Aufgabe 4

Reale Stöße. In der Vorlesung hatten wir die Grenzfälle des (vollständig) elastischen und (vollständig) inelastischen Stoßes behandelt. Reale Stöße liegen aber meistens zwischen diesen Grenzfällen. Dies wollen wir in dieser Aufgabe mit Hilfe der *phyphox* App untersuchen.

a) Installiere die App *phyphox* auf deinem Handy (oder einem dafür ausgeliehenem Handy), falls du es noch nicht für das 5. und 6. Aufgabenblatt gemacht hast (oder auf einem dafür ausgeliehenem Handy - oder bearbeite die Aufgabe mit einer Partner/in die ein geeignetes Handy hat). In diesem Versuch benötigen wir die erste Funktion unter „Mechanics“ mit dem Namen „(In)elastic collision“. Ein Video mit Demonstrationen und Erklärungen zu dieser Funktion gibt es hier `https://www.youtube.com/watch?v=sqCEo4tj3e4`.

b) Wir wollen nun Energieverluste beim Aufprall eines Gegenstandes auf dem Boden betrachten. Wähle hierzu einen Gegenstand, bei denen man mindestens drei Aufpralle nacheinander beobachten kann, also z.B. Bälle oder Murmeln. Bei "Settings" sollte der "Threshold" so gewählt werden, dass Hintergrundgeräusche die Messung nicht beeinflussen. Nun starte die Messung durch Drücken des "Play" Symbols und lasse den Gegenstand aus einer geeigneten Höhe fallen. Führe die Messung für beide Gegenstände nacheinander durch.

c) Notiere die Zeitintervalle zwischen den Aufschlägen auf dem Boden in einer Tabelle. Entweder kannst du sie einfach vom Bildschirm der App notieren oder du exportierst die Daten deiner Messung aus der App und bearbeitest sie in einer Software deiner Wahl (z.B. Excel) weiter. Zum Export der Daten kannst du die Funktion "Export Data" im Menu oben rechts nutzen.

d) **Für die Analyse mit Software:** Öffne die Daten in einem Programm deiner Wahl, z.B. QtPlot oder Excel. Für programmieraffine mit Python-Kenntnissen sind "Jupyter Notebooks" und die "Numpy" oder "Pandas" Pakete sehr empfehlenswert.
Lösung:
Die hier verwendeten Gegenstände: Cremedose [CD], Plastikflasche [PF]

	h_CD in cm	t_CD in s	h_PF in cm	t_PF in s
0	155.14	0.000	73.83	0.000
1	50.91	0.644	54.23	0.665
2	16.70	0.369	39.84	0.570
3	7.53	0.248	12.98	0.325
4	1.69	0.117	2.21	0.134

e) Berechne aus den gemessenen Zeitintervallen zwischen den Aufschlägen die maximalen Höhen, die zwischen den Aufschlägen erreicht werden *Hinweis: Zwischen den Aufschlägen auf dem Boden kann man die Bewegung als freien Fall nähern und die gemessenen Zeiten sind die Abstände zwischen zwei Aufprallen, also eine Anstiegs- und eine Fallbewegung.*
Lösung:
Für die Berechnung der Höhen verwenden wir die Gleichung:

$$y(t) = \frac{1}{2} g \Delta t^2 \tag{24}$$

Die gemessenen Zeiten müssen durch 2 geteilt werden, da die Zeitmessung für die Dauer zwischen zwei Aufprällen gilt.

Als ein Beispiel rechnen wir einen Fall für die Cremedose:

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (0,5 \cdot (t_1 - t_0))^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot (0,5 \cdot 0,644s)^2 = 0,51 m/s \tag{25}$$

	errechnete Höhe CD in m	errechnete Höhe PF in m
0	0.00	0.00
1	0.51	0.54
2	0.17	0.40
3	0.08	0.13
4	0.02	0.02

f) Berechne nun die Verhältnisse der Energien jeweils zwischen zwei aufeinanderfolgenden Aufprallen. Dieses Verhältnis E_{N-1}/E_N ist ein Maß für den Energieverlust beim Aufprall, wobei E_N die Gesamtenergie des Gegenstandes zwischen zwei aufeinanderfolgenden Aufschlägen ist.

Hinweis: Überlege, welche Energie hier involviert sind. Zur Berechnung von E_{N-1}/E_N betrachte den Gegenstand jeweils am höchsten Punkt zwischen den Aufschlägen.

Lösung:

Nun soll die Energie berechnet werden, die bei jedem Aufprall verloren geht.

Hierfür verwenden wir die Gleichung für die potentielle Energie

$$E_{pot} = mgh \tag{26}$$

Das Verhältnis der Energien zwischen zwei Aufprällen können wir wie folgt berechnen:

$$\frac{E_N}{E_{N-1}} = \frac{mgh_N}{mgh_{N-1}}$$

Die Masse und g bleiben konstant.

$$\Rightarrow E_N = E_{N-1}\frac{h_N}{h_{N-1}} \tag{27}$$

	errechnete Energieverhältnisse CD	errechnete Energieverhältnisse PF
E2/E1	0.33	0.73
E3/E2	0.45	0.33
E4/E3	0.22	0.17

g) Kann man aus den bisherigen Berechnungen auf die ursprüngliche Fallhöhe h_0 schließen?

Lösung:

Die obige Gleichung nach h_N umgestellt und unter der Annahme, dass die Energieverhältnisse zwischen je zwei aufeinander folgenden Aufprallen konstant sind, folgt:

$$h_0 = h_1\frac{E_0}{E_1} \approx h_1\frac{E_1}{E_2} \tag{28}$$

Die berechneten Werte für die Starthöhen

Für die Cremedose:

$$h_0 = h_1\frac{E_1}{E_2} = 1,5490\ m = 154,90cm \tag{29}$$

Für die Plastikflasche:

$$h_0 = h_1\frac{E_1}{E_2} = 0,7381\ m = 73,81cm \tag{30}$$