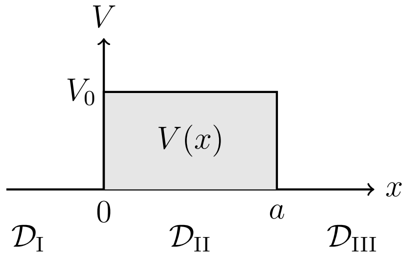
Blatt 8

Ausgabe: Freitag, 08.01.2021; Abgabe bis: Freitag, 15.01.2021, 14 Uhr (**20 Punkte**)

Aufgabe 1 Potentialbarriere und der Tunneleffekt [12 Punkte]

Wir betrachten eine Potentialbarriere der Breite $a > 0$ und Höhe $V_0 > 0$:



$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ V_0, & \text{falls } x \leq 0 \leq a \\ 0, & \text{falls } x > a \end{cases} \tag{1}$$

und bezeichnen die drei Intervalle mit konstantem Potential als $\mathcal{D}_\mathrm{I} = (-\infty, 0)$, $\mathcal{D}_\mathrm{II} = [0, a]$ und $\mathcal{D}_\mathrm{III} = (a, \infty)$. Wir stellen uns die Situation eines in $\mathcal{D}_\mathrm{I}$ lokalisierten Teilchens vor, welches zur Zeit $t = 0$ durch ein Wellenpaket der Form

$$\psi(x,t) = \int_\mathbb{R} \frac{dk}{2\pi} \varphi(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega(k)t)} \tag{2}$$

beschrieben wird wobei die Funktion $\varphi(k)$ so gewählt sei, dass $\psi(x,0) \neq 0$ nur dann, falls $x \in \mathcal{D}_\mathrm{I}$ gilt. Wir betrachten im Folgenden den Fall, dass das Teilchen auf die Potentialbarriere zuläuft und wollen die Transmissionseigenschaften dieser Barriere untersuchen.

(1.a) (**3 Punkte**) Geben Sie in der Ortsdarstellung die allgemeinen Lösungen der Schrödingergleichung in den Bereichen konstanten Potentials mit Energie $E > 0$ an, also die zeitabhängigen Wellenfunktionen mit

(i) $\psi_\mathrm{I}(x,t)$ ist Lösung der Schrödingergleichung für $x \in \mathcal{D}_\mathrm{I}$

(ii) $\psi_\mathrm{II}(x,t)$ ist Lösung der Schrödingergleichung für $x \in \mathcal{D}_\mathrm{II}$

(iii) $\psi_\mathrm{III}(x,t)$ ist Lösung der Schrödingergleichung für $x \in \mathcal{D}_\mathrm{III}$

Welche Wellenfunktionen beschreiben *linkslaufende*, welche *rechtslaufende* Zustände?

(1.b) (**2 Punkte**) Betrachten Sie nun die zeitunabhängige Schrödingergleichung für das vollständige Potential $V(\hat{x})$ mit den zugehörigen stationären Zuständen $\psi(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie $\psi_\mathrm{I}(x), \psi_\mathrm{II}(x)$ und $\psi_\mathrm{III}(x)$ und geben Sie einen Ansatz für jene stationären Zustände $\psi(x)$ mit Energie $E > 0$ an, welche ein Teilchen beschreiben, das im Bereich $x \in \mathcal{D}_\mathrm{III}$ nur rechtslaufend ist. Wie kann aus diesem Ansatz für das in eq. (2) beschriebene, einfallende Teilchen, der Transmissionskoeffizient T der Potentialbarriere bestimmt werden?

(1.c) (**4 Punkte**) Verwenden Sie nun geeignete Anschlußbedingungen an den Intervallgrenzen $x = 0$ und $x = a$, um die stationären Zustände $\psi(x)$ für $0 < E \leq V_0$ zu bestimmen. *Hinweis: Überlegen Sie, welche Stetigkeitseigenschaften $\psi(x)$ erfüllen muss und formulieren Sie daraus Bedingungen an die Koeffizienten der einzelnen Teillösungen $\psi_{\mathrm{I}}(x), \psi_{\mathrm{II}}(x)$ und $\psi_{\mathrm{III}}(x)$*

(1.c) (**3 Punkte**) Verwenden Sie ihre Ergebnisse und bestimmen Sie für $0 < E \leq V_0$ den Transmissionskoeffizienten T. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der klassischen Erwartung für ein von links einfallendes Teilchen der Energie $0 < E \leq V_0$.

Aufgabe 2 Teilchen mit Spin [8 Punkte]

Die explizite Behandlung des Elektronenspins im Rahmen der nichtrelativistischen Quantenmechanik führt auf die Pauligleichung, eine Erweiterung der Schrödingergleichung. Diese erlaubt die Beschreibung der Kopplung des Elektrons an ein externes elektromagnetisches Feld mit skalarem Potential $\varphi(\underline{r}, t)$ und Vektorpotential $\underline{A}(\underline{r}, t)$ unter Berücksichtigung des zusätzlichen Spin $1/2$-Freiheitsgrades eines Elektrons. Wir betrachten einen Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{\pi}})^2}{2m} + q\hat{\varphi}\ , \quad \hat{\underline{\pi}} = \hat{\underline{p}} - \frac{q}{c}\hat{\underline{A}}\ , \tag{3}$$

mit generalisiertem Impulsoperator $\hat{\underline{\pi}}$, welcher aus der Quantisierung des verallgemeinerten Impulses $\underline{\pi} = \underline{p} - \frac{q}{c}\underline{A}$ für ein Teilchen der Ladung q im Magnetfeld $\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$ hervorgeht (Erinnern Sie sich an die Hamilton'sche Formulierung der Mechanik). Hier ist $\hat{\underline{\sigma}}$ wieder der Vektor der Paulimatrizzen (vgl. Blatt 1).

(2.a) (**4 Punkte**) Zeigen Sie, dass in der symmetrischen Eichung: $\hat{\underline{A}} = \frac{1}{2}\underline{B} \times \hat{\underline{r}}$ mit $\underline{B}$ einem homogenen externen Magnetfeld ($\varphi = 0$), der Hamiltonoperator eq. (3) in den Pauli-Hamiltonoperator

$$\hat{H}_P = \frac{\hat{\underline{p}}^2}{2m} - \frac{q}{2mc}\left(\hat{\underline{L}} + 2\hat{\underline{S}}\right) \cdot \underline{B} + \mathcal{O}(\underline{B}^2)\ , \tag{4}$$

mit dem Drehimpulsoperator $\hat{\underline{L}} = \hat{\underline{r}} \times \hat{\underline{p}}$ überführt werden kann. Bestimmen Sie dafür zunächst den Kommutator $[\hat{\pi}_\alpha, \hat{\pi}_\beta]$ $(\alpha, \beta = x, y, z)$ und verwenden Sie das Resultat, um dann $(\hat{\underline{\sigma}} \cdot \hat{\underline{\pi}})^2$ auszuwerten. *Hinweis: Es gilt $(\underline{B} \times \underline{r}) \cdot \underline{\nabla}_{\underline{r}} = (\underline{r} \times \underline{\nabla}_{\underline{r}}) \cdot \underline{B}$.*

(2.b) (**1 Punkt**) Geben Sie die allgemeine Form der Eigenzustände von $\hat{H}_P$ an, wobei ab jetzt Terme $\mathcal{O}(\underline{B}^2)$ vernachlässigt werden. *Hinweis: Überlegen Sie, auf welchem Hilbertraum $\hat{H}_P$ operiert.*

(2.c) (**3 Punkte**) Seien nun $|\varphi\rangle$ die Eigenzustände des Operators

$$\hat{H}_L = \frac{\hat{\underline{p}}^2}{2m} - \frac{q}{2mc}\hat{\underline{L}} \cdot \underline{B} \tag{5}$$

mit Eigenwerten E_L: $\hat{H}_L |\varphi\rangle = E_L |\varphi\rangle$. Bestimmen Sie damit die Eigenzustände und Energien des Pauli-Hamiltonoperators eq. (4) für ein Magnetfeld der Form $\underline{B} = B(\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)$ ($B \in \mathbb{R}$, vernachlässigen Sie wieder Terme $\mathcal{O}(B^2)$). *Hinweis: Machen Sie einen Produktansatz um die Spinorkomponenten abzuseparieren.*