Blatt 6

Ausgabe: Freitag, 11.12.20; Abgabe bis: Freitag, 18.12.2020, 14 Uhr (**20 Punkte**)

Aufgabe 1 Schrödinger- und Heisenbergbild [12 Punkte]

Die Formulierung der Zeiabhängigkeit in der Quantenmechanik im wellenfunktionbasierten Schrödingerbild ist völlig äquivalent zum operatorbasierten Heisenbergbild. Wir haben bereits die Zeitabhängigkeit im Heisenbergbild gesehen, welche die Zeitentwicklung von Operatoren $\hat{A}(t)$ beschreibt

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{A}(t), \hat{H}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \, , \tag{1}$$

mit einem Operator $\hat{H}$, den wir *Hamilton*-Operator nennen wollen. Wir wollen im Folgenden demonstrieren, dass, unter wenigen Annahmen, die Zeitabhängigkeit im Allgemeinen *eindeutig* aus der Wahl eines hermiteschen Operators $\hat{X}$ (bsw. $\hat{X} = \hat{H}$) folgt und sich in natürlicher Weise sowohl das Heisenberg- als auch das Schrödingerbild ergibt. $\hat{X}$ erfüllt dabei die Eigenschaft der *Lokalität* in der Zeit und die generierte Zeitunabhängigkeit lässt Kommutatoren invariant (Erhaltung der Operatoralgebra).

(1.a) (**4 Punkte**) Betrachten Sie die fundamentalen Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$ und nehmen Sie an, dass die Operatoralgebra $[\hat{x}(t), \hat{p}(t)] = [\hat{x}(t'), \hat{p}(t')]$ zeitunabhängig sein soll. Zeigen Sie, dass diese Vorraussetzung durch eine eindeutige und lineare Zeitentwicklung erfüllt wird, also durch Ähnlichkeitstransformationen $\hat{U}_{\hat{A}}(t,t'), \hat{U}_{\hat{B}}(t,t')$ generiert wird, sodass für geeignete $t, t' \in \mathbb{R}$ gilt

$$\hat{A}(t) = \hat{U}^{-1}_{\hat{A}}(t,t')\hat{A}(t')\hat{U}_{\hat{A}}(t,t') \quad \text{und} \quad \hat{B}(t) = \hat{U}^{-1}_{\hat{B}}(t,t')\hat{B}(t')\hat{U}_{\hat{B}}(t,t') \, , \tag{2}$$

mit Observablen $\hat{A}(t), \hat{B}(t), \hat{A}(t'), \hat{B}(t')$ als polynomielle Funktionen von $\hat{x}(t), \hat{p}(t)$ und $\hat{U}_{\hat{A}}(t,t') = \hat{U}_{\hat{B}}(t,t') \equiv \hat{U}(t,t')$. Zeigen Sie weiterhin, dass $\hat{U}(t,t')$ sogar unitär ist.

(1.b) (**3 Punkte**) Zeigen Sie nun unter Verwendung der Annahme, dass der Operator $\hat{U}(t,t')$ die Kompositionseigenschaft

$$\hat{U}(t,t') = \hat{U}(t,t'')\hat{U}(t'',t') \, , \quad t \geq t'' \geq t' \in \mathbb{R} \, , \tag{3}$$

besitzt, dass der *Generator* der Zeitentwicklung

$$\hat{X} = \mathrm{i}\frac{\partial \hat{U}(t,t')}{\partial t}\hat{U}^{\dagger}(t,t') \tag{4}$$

hermitesch und lokal in der Zeit ist, also nur von einer Zeitkoordinate abhängt: $\hat{X} \equiv \hat{X}(t)$.

(1.c) (**5 Punkte**) Kombinieren Sie ihre bisherigen Überlegungen und zeigen Sie, dass dieses $\hat{X}(t) = \frac{\hat{H}(t)}{\hbar}$ die Heisenbergzeitentwicklung eq. (1) von Observablen $\hat{A}(t)$ erzeugt, falls $\hat{H}$ zeitunabhängig ist. Zeigen Sie zusätzlich, dass mit $\hat{U}(t,t')\,|\psi(t')\rangle = |\psi(t)\rangle$ die Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)\,|\psi(t)\rangle \tag{5}$$

folgt (hier sogar mit zeitabhängigem $\hat{H}(t)$).

Aufgabe 2 Zeitabhängiger Stern-Gerlach [8 Punkte]

Wir betrachten noch einmal den Stern-Gerlach-Versuchsaufbau und wollen nun auch die Zeitabhängigkeit der Spinorientierung behandeln, während die Teilchen die Magneten passieren. Hierfür werden wir im Schrödingerbild arbeiten, um abhängig von den Anfangsbedingungen die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Spinorientierungen nach Passieren des Versuchsaufbaus zu ermitteln.

(2.a) (**1 Punkt**) Betrachten Sie zunächst ein Teilchen, dessen Spin entlang der positiven x-Richtung ausgerichtet ist (bsw. durch eine Messung). Geben Sie die Spinkomponente dieses Zustandes $|+\rangle \in \mathbb{C}^2$ in der Eigenbasis des $\hat{S}_z$-Operators an, bestimmen Sie also die Koeffizienten $\alpha_{\uparrow,\downarrow}$, sodass $|+\rangle = \alpha_\uparrow\,|\uparrow\rangle_z + \alpha_\downarrow\,|\downarrow\rangle_z$.

Dieses Teilchen der Masse m passiere nun mit einer Geschwindigkeit v ein homogenes Magnetfeld $\underline{B} = B\underline{e}_z$, welches durch einen Magneten der Länge l generiert wird. Der entsprechende Hamiltonoperator innerhalb des Magneten ist Ihnen bereits vom letzten Übungsblatt bekannt und gegeben durch

$$\hat{H} = -\frac{e}{mc}\underline{B}\cdot\hat{\underline{S}} = -\frac{eB}{mc}\hat{S}_z\,. \tag{6}$$

(2.b) (**2 Punkte**) Bestimmen Sie zunächst die Zeitabhängigkeit der $\hat{S}_z$-Eigenzustände $|\uparrow\rangle\,,|\downarrow\rangle$ indem Sie für diese die Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle \tag{7}$$

lösen.

(2.c) (**1 Punkte**) Konstruieren Sie nun die Zeitentwicklung des Zustandes $|\psi(t)\rangle$ mit $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$ im Magnetfeld $\underline{B}$. Bestimmen Sie damit die Wahrscheinlichkeiten, das Teilchen nach dem Durchgang in den $\hat{S}_z$-Eigenzuständen $|\uparrow\rangle_z\,,|\downarrow\rangle_z$ zu finden.

(2.d) (**2 Punkte**) Wir platzieren nun in Flugrichtung einen weiteren Magneten der Länge l mit einem homogenen Magnetfeld $\underline{B}' = B\underline{e}_x$. Diesen richten wir so aus, dass, falls das Teilchen im Magnetfeld $\underline{B}$ entlang der positiven z-Richtung abgelenkt wird, es daraufhin das Feld $\underline{B}'$ durchqueren soll. Sollte das Teilchen im Magnetfeld $\underline{B}$ entlang der negativen z-Richtung abgelenkt werden, so soll es von einem Absobermaterial aufgenommen werden und dem Versuchsaufbau nicht weiter zur Verfügung stehen.

Bestimmen Sie wieder die Wahrscheinlichkeiten, das Teilchen nach dem Durchgang des zweiten Magnetfeldes $\underline{B}'$ in den $\hat{S}_z$-Eigenzuständen $|\uparrow\rangle_z\,,|\downarrow\rangle_z$ zu finden. Was fällt Ihnen auf? Gibt es eine Möglichkeit den Versuchsaufbau so zu wählen, dass das Teilchen mit Sicherheit im Eigenzustand $|\downarrow\rangle_z$ gefunden werden kann?

(2.e) (**2 Punkte**) Schließlich modifizieren wir den Versuchsaufbau erneut und rotieren den ersten Magneten um einen Winkel ϑ um die y-Achse, sodass das Magnetfeld dann durch $\underline{B} = B(\sin(\vartheta)\underline{e}_x + \cos(\vartheta)\underline{e}_z)$ gegeben ist. Den zweiten Magneten rotieren wir zurück, sodass das Feld parallel zu z-Achse zeigt $\underline{B}' = B\underline{e}_z$.

Nehmen Sie nun an, das Teilchen passiert den ersten Magneten und wird auf den zweiten abgelenkt. Es befinde sich vor dem Eintritt in den zweiten Magneten im Eigenzustand $|\psi(t=0)\rangle = |+,\vartheta\rangle$ von $\hat{H} = -\frac{eB}{mc}\underline{B} \cdot \underline{\hat{S}}$, mit dem zugehörigen Eigenwert $-\frac{eB\hbar}{2mc}$. Bestimmen Sie die zeitabhängigen Erwartungswerte

$$\langle \hat{S}_\alpha \rangle (t) = \langle \psi(t)|\hat{S}_\alpha|\psi(t)\rangle \quad \text{für } \alpha = x, z. \tag{8}$$

Was passiert, wenn Sie diese über die Zeitabhängigkeit mitteln, also $\frac{1}{T}\int\limits_0^T dt\, \langle \hat{S}_\alpha \rangle (t)$ berechnen mit einer geeigneten Periodenlänge T?