Blatt 5

Ausgabe: Freitag, 4.12.20; Abgabe bis: Freitag, 11.12.2020, 14 Uhr (**20 Punkte**)

Aufgabe 1 Spins und Unbestimmheit [5 Punkte]

(1.a) (**5 Punkte**) Ein allgemeiner Spin $S = 1/2$-Zustand in der z-Basis lässt sich mit $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$ wiefolgt parameterisieren

$$|\psi(\varphi,\vartheta)\rangle = \cos(\vartheta/2)\,|\uparrow\rangle + e^{i\varphi}\sin(\vartheta/2)\,|\downarrow\rangle \ . \tag{1}$$

Bestimmen Sie die Parameter (φ, ϑ) so, dass das x- und y-Unschärfeprodukt maximiert wird, also

$$|\psi_{\max}\rangle = \max_{\varphi,\vartheta} \left(\Delta S_x(\varphi,\vartheta)\right)^2 \left(\Delta S_y(\varphi,\vartheta)\right)^2 \quad \text{mit} \quad \Delta S_\alpha = \sqrt{\langle \hat{S}_\alpha^2\rangle_{\psi(\varphi,\vartheta)} - \langle \hat{S}_\alpha\rangle^2_{\psi(\varphi,\vartheta)}} \ . \tag{2}$$

Erfüllt dieser Zustand die Unschärferelation für $\hat{S}_x, \hat{S}_y$?

Aufgabe 2 Wahrscheinlichkeitsstrom [7 Punkte]

Die Interpretation des Absolutbetragsquadrates $|\psi(x)|^2$ der Wellenfunktion eines Zustandes $|\psi\rangle$ als Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte erlaubt es, die Dynamik eines Zustandes mit einer anschaulichen Größe in Verbindung zu bringen: der Wahrscheinlichkeitsstromdichte im Schrödingerbild (hier in einer Dimension)

$$j(x,t) = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} - \psi(x,t)\frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial x}\right) \tag{3}$$

(2.a) (**3 Punkte**) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P_{ab}(t)$, ein Teilchen zur Zeit t im Interval $[a,b]$ aufzufinden die folgende Beziehung erfüllt

$$\frac{dP_{ab}(t)}{dt} = j(a,t) - j(b,t) \ . \tag{4}$$

(2.b) (**2 Punkte**) Betrachten Sie für $m, A \in \mathbb{R}$ die zeitabhängige Wellenfunktion

$$\psi(x,t) = \left(\frac{2mA}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-A\frac{mx^2}{\hbar} - iAt} \tag{5}$$

und bestimmen Sie für diese $J_{ab} = \frac{dP_{ab}(t)}{dt}$. Wie interpretieren Sie ihr Ergebnis?

(2.c) (**2 Punkte**) Es sei nun $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ ein Hamiltonoperator mit einer in $\hat{x}$ polynomiellen Funktion $V(\hat{x})$. Bestimmen Sie $V(\hat{x})$ so, dass $\psi(x,t)$ eine Lösung der zugehörigen Schrödingergleichung $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$ ist. Geben Sie die entsprechende Energie E an.

Aufgabe 3 Zeitentwicklung im Heisenbergbild [8 Punkte]

Wir wollen die Darstellung der Zeitabhängigkeit von Operatoren im Heisenbergbild etwas besser kennenlernen und betrachten dafür ein paar grundlegende Beispiele.

(2.a) (**3 Punkte**) Gegeben sei der Hamiltonoperator eines freien Teilchens der Masse m

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \; . \tag{6}$$

Bestimmen Sie die Zeitentwicklung der Operatoren $\hat{x}(t), \hat{p}(t)$ mit $\hat{x}(0) = \hat{x}$ und $\hat{p}(0) = \hat{p}$. Geben Sie damit die Zeitabhängigkeit der Impuls- und Ortseigenzustände im Schrödingerbild an, also bestimmen Sie $|\psi_p(t)\rangle$ mit $|\psi_p(0)\rangle = |p\rangle$ und $|\psi_x(t)\rangle$ mit $|\psi_x(0)\rangle = |x\rangle$. *Hinweis: Verwenden Sie ein Ergebnis von Aufgabenblatt 4.*

(2.b) (**5 Punkte**) Betrachten Sie nun den Hamiltonoperator eines Spin $S = 1/2$ in einem zeitunabhängigen Magnetfeld $\underline{B} = B\underline{e}_z$

$$\hat{H} = -\frac{e}{mc}\underline{B} \cdot \hat{\underline{S}} = -\frac{eB}{mc}\hat{S}_z \; . \tag{7}$$

Lösen Sie die Heisenberggleichung für jede Spinkomponente $\hat{S}_\alpha$ einzeln, um deren Zeitabhängigkeit zu bestimmen. Verwenden Sie als formale Anfangsbedingung $\hat{S}(0)_\alpha = \hat{S}_\alpha$. *Hinweis: Erinnern Sie sich an die Lösung von gekoppelten linearen Differentialgleichungen.*