LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Physik im WiSe 2020/21
T2: Quantenmechanik 1
Dozent: Prof. Dr. Ulrich Schollwöck
Übungen: Dr. S. Paeckel, F. Palm

www.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/wise_20_21/T2_quant_mech

Blatt 4

Ausgabe: Freitag, 27.11.20; Abgabe bis: Freitag, 4.12.2020, 14 Uhr (**20 Punkte**)

Aufgabe 1 Hamilton'sche Bewegungsgleichungen [6 Punkte]

Aus der klassischen Mechanik und Kapitel 1 der Vorlesung kennen Sie die Poisson-Klammer $\{\cdot\,,\cdot\}$, welche für kanonisch konjugierte, verallgemeinerte Orts- und Impulskoordinaten q_μ und p_ν die Relationen

$$\{q_\mu, q_\nu\} = 0\ , \quad \{p_\mu, p_\nu\} = 0 \quad \text{und} \quad \{q_\mu, p_\nu\} = \delta_{\mu,\nu}\ , \tag{1}$$

erfüllt, wobei üblicherweise $\mu, \nu = x, y, z$ die räumlichen Dimensionen bezeichnet. Weiterhin gilt für die klassische Hamiltonfunktion $H(\underline{q}, \underline{p})$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\mu} = \dot{q}_\mu \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial q_\mu} = -\dot{p}_\mu\ . \tag{2}$$

Mit Hilfe der Poisson-Klammer lässt sich die Zeitentwicklung von Observablen in der Quantenmechanik motivieren. Dafür betrachten wir die formale Identifikation der klassischen Poisson-Klammer mit dem quantenmechanischen Kommutator: $\{\cdot\,,\cdot\} \to -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\cdot\,,\cdot\right]$. Dies wollen wir im Folgenden nachvollziehen, wobei wir annehmen, dass die Hamiltonfunktion keine explizite Zeitabhängigkeit besitzt.

(1.a) (**1 Punkt**) Zeigen Sie zunächst für Funktionen der klassischer Koordinaten $f(\underline{q}, \underline{p})$ ohne explizite Zeitabhängigkeit ($\frac{\partial f}{\partial t} = 0$), dass deren Dynamik durch die Poisson-Klammer generiert wird, also

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}\ . \tag{3}$$

(1.b) (**2 Punkte**) Betrachten Sie nun die Orts- und Impulsoperatoren

$$\langle \underline{x}|\hat{x}_\mu|\underline{x}'\rangle = x_\mu \delta(\underline{x} - \underline{x}') \quad \text{und} \quad \langle \underline{x}|\hat{p}_\mu|\underline{x}'\rangle = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta(\underline{x} - \underline{x}') \tag{4}$$

in der Ortsdarstellung und bestimmen Sie die Kommutatoren

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu]\ , \quad [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] \quad \text{und} \quad [\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu]\ . \tag{5}$$

(1.c) (**2 Punkte**) Zeigen Sie nun, dass polynomielle, operatorwertige Funktionen $F(\hat{\underline{x}})$ und $G(\hat{\underline{p}})$ den folgenden Beziehungen genügen:

$$[\hat{p}_\mu, F(\hat{\underline{x}})] = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial F}{\partial x_\mu}\ , \quad [\hat{x}_\mu, G(\hat{\underline{p}})] = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial G}{\partial p_\mu}\ . \tag{6}$$

(1.d) (**1 Punkt**) Geben Sie nun ein Beispiel für eine operatorwertige Funktion $\hat{H}(\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{p}})$ an, sodass die Orts- und Impulsoperatoren eine "Zeitabhängigkeit" der Form

$$\frac{d\hat{x}_\mu}{dt} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\hat{x}_\mu, \hat{H}\right] \quad \text{und} \quad \frac{d\hat{p}_\mu}{dt} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\hat{p}_\mu, \hat{H}\right] \tag{7}$$

besitzen. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 2 Zeitentwicklung eines Wellenpakets [14 Punkte]

Nun widmen wir uns der Beschreibung der Zeitabängigkeit von Zuständen (wir werden später sehen, wie die Zeitabhängigkeit von Operatoren und Zuständen zusammenhängt). Wir betrachten die eindimensionale Schrödingergleichung für ein freies (spinloses) Teilchen der Masse m in der Ortsdarstellung, welches durch die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ beschrieben wird:

$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hat{p}^2}{2m}\right)\psi(x,t) = 0 \; . \tag{8}$$

(2.a) (**2 Punkte**) Zeigen Sie, dass für geeignete $p, E \in \mathbb{R}$ die ebenen Wellen der Form $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(px-Et)}$ die allgemeinen Lösungen von eq. (8) sind. Welche "klassische" Bedeutung hat E?

Nun stellen wir uns vor, wir haben in einem idealen Versuchsaufbau den Ort $x \equiv x_0$ des Teilchens zur Zeit $t = 0$ gemessen. Das Teilchen befindet sich somit im Eigenzustand $|\psi(t=0)\rangle = |x_0\rangle$ des Ortsoperators $\hat{x}$.

(2.b) (**1 Punkt**) Stellen Sie das Anfangswertproblem für das eben beschriebene, ideale Teilchen auf.
Hinweis: Erinnern Sie sich unter anderem an Übungsblatt 2.

(2.c) (**5 Punkte**) Wir bestimmen jetzt die zeitabhängige Wellenfunktion $\psi(x,t)$ in der Ortsdarstellung mit der Anfangsbedingung $\psi(x,0) = \delta(x - x_0)$.

Verwenden Sie dafür einen Teil Ihrer Überlegungen aus Aufgabenteil 2.a) um zunächst alle Eigenfunktionen $\chi_p(x) = \langle x|\chi_p\rangle$ des Operators $\frac{\hat{p}^2}{2m}$ zu finden. Diese bilden eine vollständige Basis des L^2 (warum?) und besitzen eine besonders einfache Zeitabhängigkeit; bestimmen Sie diese für alle Eigenzustände (*Hinweis: Das Ergebnis sollte Ihnen bekannt vorkommen.*).

Nutzen Sie schließlich die Eigenschaft, dass die $\chi_p(x)$ eine vollständige Basis bilden, um die Zeitentwicklung $\psi(x,t)$ des Anfangszustandes für $t \neq 0$ zu berechnen und damit das Anfangswertproblem zu lösen
Hinweis: Folgende Integrale könnten nützlich sein:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha y^2)dy = \sqrt{\frac{\pi}{2|\alpha|}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\alpha y^2)dy = \mathrm{sgn}(\alpha)\sqrt{\frac{\pi}{2|\alpha|}}$$

(2.d) (**1 Punkte**) Betrachten Sie die zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$. Was fällt Ihnen auf und wie erklären Sie ihre Beobachtung?
Hinweis: Erinnern Sie sich an Ihre Ergebnisse vom letzten Übungsblatt.

Die Methode, zunächst die Eigenfunktionen des Operators $\frac{\hat{p}^2}{2m}$ zu bestimmen und daraufhin den Anfangszustand in dieser Basis auszudrücken, ist eines der wichtigsten Verfahren in der Quantenmechanik, um die zeitabhängige Schrödingergleichung zu lösen. Wir üben es daher noch an einem zweiten Beispiel: dem gauß'schen Wellenpaket.

(2.e) (**3 Punkte**) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich ein Teilchen im Zustand $|\varphi\rangle$ welcher in der Ortsdarstellung gegeben ist durch ($\sigma > 0$):

$$\varphi(x) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \; . \tag{9}$$

Bestimmen Sie die Zeitentwicklung dieses Zustandes, also die Lösung des Anfangswertproblems eq. (8) mit $\psi(x,0) = \varphi(x)$.

(2.f) (**2 Punkte**) Berechnen Sie damit den zeitabhängigen Erwartungswert

$$\Delta x(t) = \sqrt{\langle\psi(t)|\hat{x}^2|\psi(t)\rangle - \left(\langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle\right)^2}\,. \tag{10}$$