Blatt 12

Ausgabe: Freitag, 05.02.2021

Aufgabe 1 Feynman-Hellmann Theorem

Betrachten Sie einen Hamiltonoperator $\hat{H}(\lambda)$, der kontinuierlich von einem Parameter λ abhängt. Damit hängen auch seine normierten Eigenzustände $E_n(\lambda)$ kontinuierlich von λ ab. Beweisen Sie unter diesen Bedingungen das Feynman-Hellmann Theorem:

$$\frac{\partial E_n(\lambda)}{\partial \lambda} = \langle \psi_n(\lambda)| \frac{\partial \hat{H}(\lambda)}{\partial \lambda} |\psi_n(\lambda)\rangle \tag{1}$$

Aufgabe 2 Entartete Störungstheorie

Betrachten Sie ein Spin-1 Teilchen, das durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben wird:

$$\hat{H}_0 = -\frac{\omega}{\hbar}\left(\hat{S}^z\right)^2. \tag{2}$$

(2.a) Betrachten Sie eine Störung $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$:

$$\hat{H}_1 = \frac{\delta}{\hbar}\left((\hat{S}^x)^2 - (\hat{S}^y)^2\right). \tag{3}$$

Berechnen Sie das Spektrum des gestörten Hamiltonoperators zur zweiten Ordnung in δ/ω, unter der Annahme $|\delta| \ll |\omega|$. Sie dürfen annehmen dass $\omega > 0$.

(2.b) Betrachten Sie eine Störung $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$:

$$\hat{H}_1 = \delta \hat{S}^x. \tag{4}$$

Berechnen Sie das Spektrum des gestörten Hamiltonoperators zur zweiten Ordnung in δ/ω, unter der Annahme $|\delta| \ll |\omega|$. Sie dürfen annehmen dass $\omega > 0$.

Aufgabe 3 Variationsrechnung

Betrachten Sie ein Quantenteilchen der Masse m im unendlich tiefen Potentialtopf: $V(x) = 0$ für $-a < x < a$, und $V(x) = \infty$ sonst. Betrachten Sie den Variationsansatz $\langle x|\tilde{0}\rangle_\lambda = |a|^\lambda - |x|^\lambda$ mit beliebigem $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Variationsenergie gegeben ist durch:

$$E_0(\lambda) = \frac{{}_\lambda\langle\tilde{0}|\,\hat{H}\,|\tilde{0}\rangle_\lambda}{{}_\lambda\langle\tilde{0}|\tilde{0}\rangle_\lambda} = \frac{(\lambda+1)(2\lambda+1)}{(2\lambda-1)}\frac{\hbar^2}{4ma^2}. \tag{5}$$