Blatt 10

Ausgabe: Freitag, 22.01.2021; Abgabe bis: Freitag, 29.01.2021, 14 Uhr (**20 Punkte**)

Aufgabe 1 Gesamtdrehimpuls eines Elektrons [12 Punkte]

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass ein Teilchen in einem Zentralpotential unter anderem durch seinen (Bahn-)Drehimpuls charakterisiert ist. Eine weitere wichtige Größe, um ein Teilchen zu beschreiben, ist sein Spin. In dieser Aufgabe wollen wir diese beiden Konzepte zusammenführen und verstehen, wie sich der Gesamtdrehimpuls eines Teilchens mit Spin $\frac{1}{2}$ und Bahndrehimpuls l beschreiben lässt. Sie können hierbei zum Beispiel an das Elektron im Wasserstoffatom denken. Wir betrachten dazu den Gesamtdrehimpulsoperator $\underline{\hat{J}} = \underline{\hat{L}} + \underline{\hat{S}}$, wobei $\underline{\hat{L}}$ der (Bahn-)Drehimpulsoperator und $\underline{\hat{S}}$ der Spinoperator ist. Wie Sie bereits wissen, ist die mathematische Struktur, um die Addition von Drehimpulsen in der Quantenmechanik zu beschreiben, das Tensorprodukt. Eine mögliche Basis, um den Gesamtdrehimpuls unseres Elektrons zu beschreiben ist die Produktbasis, in der die Basiszustände des Hilbertraums $\mathcal{H}_J = \mathcal{H}_L \otimes \mathcal{H}_S$ die Form

$$|l, \frac{1}{2}; m_l, m_s\rangle = |l; m_l\rangle \otimes |\frac{1}{2}; m_s\rangle \tag{1}$$

haben, mit $l \in \mathbb{N}_0$, $m_l = l, l-1, \dots, -l$, $m_s = \pm\frac{1}{2}$.[1] Wir werden nun eine Basis von $\mathcal{H}_J$ konstruieren, die aus gemeinsamen Eigenzuständen von $\underline{\hat{J}}^2$ und $\hat{J}_z$ bestehen. Diese Zustände bezeichnen wir mit $|j; m_j\rangle$, wobei

$$\underline{\hat{J}}^2 |j; m_j\rangle = j(j+1) |j; m_j\rangle , \quad \hat{J}_z |j; m_j\rangle = m_j |j; m_j\rangle . \tag{2}$$

(1.a) (**1 Punkt**) Geben Sie (ohne weitere Rechnung) die möglichen Werte für j (wobei $j(j+1)$ Eigenwert von $\underline{\hat{J}}^2$ ist) und die magnetische Quantenzahl m_j an, wenn nur bekannt ist, dass das Teilchen Spin $\frac{1}{2}$ hat.

Für ein gegebenes j bilden diese Zustände eine Basis des Raums $\mathcal{H}_j$, der alle Zustände mit Gesamtdrehimpuls j enthält.

(1.b) (**3 Punkte**) Bestimmen Sie für ein Elektron mit Bahndrehimpuls $l = 1$ die resultierenden Gesamt-Drehimpuls-Eigenzustände $|j; m_j\rangle$ ausgedrückt in der Produktbasis. Überlegen Sie sich dafür, wie der Absteigeoperator $\hat{J}_- = \hat{L}_- + \hat{S}_-$ auf den Zustand $|j; m_j\rangle$ und auf einen der Produktzustände wirkt.

Wir wollen nun für beliebiges (aber fixes) l die resultierenden Zustände verstehen. Wir konzentrieren uns zunächst auf die Zustände mit maximalen j.

[1] Wir setzen der Einfachheit halber $\hbar = 1$.

(1.c) (**3 Punkte**) Zeigen Sie durch Anwendung des Absteigeoperators und einen rekursiven Beweis, dass für die Basiszustände des Hilbertraums $\mathcal{H}_j$ mit maximalem j gilt

$$|j;m_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2j}}\left(\sqrt{j+m_j}\,|l,1/2;m_j-1/2,1/2\rangle + \sqrt{j-m_j}\,|l,1/2;m_j+1/2,-1/2\rangle\right). \tag{3}$$

Hinweis: $j(j+1) - m_j(m_j-1) = (j+m_j)(j-m_j+1)$

(1.d) (**4 Punkte**) Finden Sie nun für den zweitgrößten Wert von j eine Basis von $\mathcal{H}_j$. Versuchen Sie dazu, die allgemeine Form der Zustände ähnlich zu Gl. (3) zu finden. Führen Sie anschließend einen ähnlichen Rekursionsbeweis wie in Teil (1.c). Setzen Sie dieses Verfahren so lange fort, bis Sie das minimale j erreicht haben.

(1.e) (**1 Punkt**) Die Zustände $|l,\frac{1}{2};m_l,m_s\rangle$ lassen sich als zwei-komponentige Spinoren schreiben:[2]

$$\psi_{l,1/2;m_l,+1/2}(\underline{r}) = R_{k,l}(r)Y_l^{m_l}(\theta,\varphi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\psi_{l,1/2;m_l,-1/2}(\underline{r}) = R_{k,l}(r)Y_l^{m_l}(\theta,\varphi)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Drücken Sie die Zustände $|j;m_j\rangle$ analog durch zwei-komponentige Spinoren aus.

Aufgabe 2 Darstellung von Symmetrietransformationen [8 Punkte]

Sie haben bereits die Darstellung von Rotationen aus infinitesimalen Drehungen in der Ortsdarstellung kennengelernt. Wir wollen noch einen anderen Zugang zur Darstellung von Symmetrieoperationen betrachten, hier noch einmal am Beispiel von Drehungen.

(2.a) (**1 Punkt**) In der QM werden Symmetrietransformationen durch unitäre Operatoren $\hat{U}$ dargestellt. Machen Sie für die Darstellung einer Symmetrietransformation den Ansatz $\hat{U} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta\hat{G}}$ (mit einem $\vartheta \in \mathbb{R}$) und zeigen Sie, dass $\hat{G}$ ein hermitescher Operator ist, welcher aus der Ableitung bei $\vartheta = 0$ bestimmt werden kann:

$$\mathrm{i}\hat{G} = \left.\frac{d\hat{U}}{d\vartheta}\right|_{\vartheta=0}. \tag{6}$$

Symmetrientransformationen bilden in der Regel Gruppen $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \cdots\}$ mit verschiedenen Gruppenelementen g_j und der Gruppenverknüpfung $\circ$ so, dass

$$g_j, g_k \in \mathcal{G} \Rightarrow g_j \circ g_k \in \mathcal{G}. \tag{7}$$

Die Drehungen im $\mathbb{R}^3$ bilden die spezielle orthogonale Gruppe $SO(3)$, deren Gruppenelemente $g_{\underline{n},\vartheta}$ durch Rotationen um eine Drehachse $\underline{n} \in \mathbb{R}^3$ ($|\underline{n}| = 1$) und einen Winkel ϑ charakterisiert werden können. Wir wollen nun Darstellungen dieser Gruppe auf Hilberträumen in Form von unitären Operatoren $\hat{U}(g_{\underline{n},\vartheta}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{G}_{\underline{n},\vartheta}}$ konstruieren. Es seien $g_{\underline{e}_\alpha,\vartheta}$ Drehungen um die Koordinatenachsen $\alpha = x, y, z$ und wir machen für die Darstellungen den Ansatz $\hat{U}(g_{\underline{e}_\alpha,\vartheta}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta\hat{G}_\alpha}$

[2] Dabei ist k eine weitere Quantenzahl, die uns hier nicht weiter zu interessieren braucht.

(2.b) (**3 Punkte**) Zeigen Sie die Lie-Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vartheta_\alpha \hat{G}_\alpha + \vartheta_\beta \hat{G}_\beta)} = \lim_{n\to\infty} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\vartheta_\alpha}{n}\hat{G}_\alpha} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\vartheta_\beta}{n}\hat{G}_\beta} \right]^n \ . \tag{8}$$

Verwenden Sie die Eigenschaft der Darstellung einer Gruppe auf einem linearen Raum

$$\hat{U}(g_j \circ g_k) = \hat{U}(g_j)\hat{U}(g_k) \tag{9}$$

und begründen Sie damit, warum $e^{\mathrm{i}\sum_\alpha \vartheta_\alpha \hat{G}_\alpha}$ für geeignete ϑ_α ebenfalls eine Darstellung einer Drehung ist und geben Sie (ohne Beweis) an, um welche Drehung es sich handelt. *Hinweis: Verwenden Sie* $\log(\hat{U}^x) = x\log(\hat{U})$ *und nehmen Sie an, dass* $\log(\mathrm{e}^{\hat{U}}) = \hat{U}$ *eindeutig ist.*

(2.c) (**4 Punkte**) Zeigen Sie nun exemplarisch, dass die Operatoren $\hat{G}_\alpha$ die Drehimpulsalgebra: $[\hat{G}_\alpha, \hat{G}_\beta] = \mathrm{i}\sum_\gamma \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\hat{G}_\gamma$ erfüllen. Betrachten Sie dafür den Fall von hintereinander ausgeführten Drehungen:

$$\hat{U}(g_{\underline{e}_\alpha,-\vartheta} \circ g_{\underline{e}_\beta,\varphi} \circ g_{\underline{e}_\alpha,\vartheta}) = \hat{U}(g_{\underline{n},\varphi}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi\underline{n}\cdot\underline{\hat{G}}} \ . \tag{10}$$

Bestimmen Sie zunächst die Drehachse $\underline{n}$ für den Fall $\alpha = z$ und $\beta = x$. Arbeiten Sie dann im Limes infinitesimaler Drehungen und zeigen Sie, dass $[\hat{G}_z, \hat{G}_x] = \mathrm{i}\hat{G}_y$.