Blatt 1

Ausgabe: Freitag, 06.11.20; Abgabe bis: Freitag, 13.11.2020, 14 Uhr (**20 Punkte**)

Aufgabe 1 Spin-1/2

Wir beschäftigen uns etwas eingehender mit den in der Vorlesung eingeführten Spin $S = 1/2$ Freiheitsgraden, die unter anderem zur Beschreibung des Stern-Gerlach-Versuchs herangezogen werden. Hierfür betrachten wir einen zwei-dimensionalen normierten Vektorraum V und einen Vektoroperator (wir kennzeichnen Operatoren im Folgenden explizit durch einen Hut, Matrizen durch doppelte Unterstriche):

$$\underline{\hat{S}} = \begin{pmatrix} \hat{S}_x \\ \hat{S}_y \\ \hat{S}_z \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_y \\ \hat{\sigma}_z \end{pmatrix} , \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}_\alpha : V \longrightarrow V \ . \tag{1}$$

In der z-Basis mit $V = \operatorname{span}\{|z =\uparrow\rangle , |z =\downarrow\rangle\}$ werden die $\hat{\sigma}_\alpha$'s durch die Pauli-Matrizen dargestellt, die bereits auf dem vorherigen Übungszettel eingeführt wurden. So gilt bsw. $\langle z|\hat{\sigma}_z|z'\rangle = \operatorname{sign}(z)\delta_{z,z'}$ mit $\operatorname{sign}(\uparrow) = 1$ und $\operatorname{sign}(\downarrow) = -1$.

(1.a) (**2 Punkte**) Betrachten Sie die Vektoren

$$|\psi_1\rangle = |\uparrow\rangle \ , \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + \mathrm{i}\,|\downarrow\rangle) \quad \text{und} \quad |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \tag{2}$$

und bestimmen sie jeweils die Erwartungwerte $\langle \hat{S}_\alpha \rangle_n = \langle \psi_n|\hat{S}_\alpha|\psi_n\rangle$ $(n = 1, 2, 3)$. Geben Sie dann explizit in der z-Basis die Matrixdarstellungen der unitären(!) Operatoren $\hat{R}_{21}$ und $\hat{R}_{31}$ an, welche die Zustände ineinander überführen:

$$\hat{R}_{21}\,|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle \ , \quad \hat{R}_{31}\,|\psi_1\rangle = |\psi_3\rangle \ . \tag{3}$$

(1.b) (**2 Punkte**) Sie kennen bereits für Einheitsvektoren $\underline{n} \in \mathbb{R}^3$ den Zusammenhang

$$\exp\left\{-\mathrm{i}\frac{\vartheta}{2}(\underline{n} \cdot \underline{\hat{\sigma}})\right\} = \hat{\mathbb{1}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - \mathrm{i}\,(\underline{n} \cdot \underline{\hat{\sigma}}) \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \ . \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass mit der Definition

$$\hat{R}_{\underline{n}}(\vartheta) := \exp\left\{-\mathrm{i}\frac{\vartheta}{2}(\underline{n} \cdot \underline{\hat{\sigma}})\right\} \tag{5}$$

der Operator $\hat{R}_{\underline{n}}(\vartheta)$ unitär ist und die Eigenschaft $\hat{R}_{\underline{n}}(-\vartheta)\hat{R}_{\underline{n}}(\vartheta) = \hat{\mathbb{1}}$ erfüllt.

(1.c) (**4 Punkte**) Nun wollen wir uns davon überzeugen, dass $\hat{R}_{\underline{n}}(\vartheta)$ Drehungen des Spinfreiheitsgrades um die Drehachse $\underline{n}$ und den Winkel ϑ erzeugt. Dafür fordern wir, dass die Komponenten des Spinoperators $\underline{\hat{S}}$ wie die eines klassischen Vektors unter Rotationen transformieren sollen. Im Folgenden zeigen wir, dass eine Transformation des Spinoperators definiert durch:

$$\underline{\hat{S}} \longrightarrow \hat{R}_{\underline{n}}(\vartheta)\underline{\hat{S}}\hat{R}^{\dagger}_{\underline{n}}(\vartheta) \tag{6}$$

die Komponenten $\hat{S}_\alpha$ entsprechend der Rotation von Vektoren $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ transformiert. Überführen Sie dafür die transformierten $\hat{S}_\alpha$'s in die komponentenweise Darstellung einer Drehung $\underline{x}' = \underline{\underline{D}}_{\underline{n}}(\vartheta)\underline{x}$ im $\mathbb{R}^3$ um eine Achse $\underline{n}$ und einen Winkel ϑ:

$$x'_\beta = \sum_\alpha \left[\underline{\underline{D}}_{\underline{n}}(\vartheta)\right]_{\beta,\alpha} x_\alpha, \tag{7}$$

$$\left[\underline{\underline{D}}_{\underline{n}}(\vartheta)\right]_{\beta,\alpha} = (1-\cos(\vartheta))n_\beta n_\alpha + \cos(\vartheta)\delta_{\beta,\alpha} - \sin(\vartheta)\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}n_\gamma \tag{8}$$

mit dem Levi-Civita-Tensor $\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}$. *Hinweis:* Es genügt hier die Gültigkeit für Drehungen um einzelne Koordinatenachsen zu zeigen. Die Relation $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z = \mathrm{i}\mathbb{1}$ könnte hilfreich sein.

(1.d) (**2 Punkte**) Verwenden Sie nun die Unitarität von $\hat{R}_{\underline{n}}(\vartheta)$, um für einen allgemeinen Drehwinkel ϑ die Eigenzustände des Spinoperators nach einer Rotation um die y-Achse, also einer Drehung

$$\underline{\underline{D}}_{\underline{e}_y}(\vartheta)\underline{\hat{S}} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & 0 & -\sin(\vartheta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\vartheta) & 0 & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \underline{\hat{S}}\ , \tag{9}$$

in der z-Basis zu finden. Benutzen Sie als Ausgangspunkt ihrer Überlegungen das Eigenwertproblem

$$\underline{e}_z \cdot \underline{\hat{S}}\,|z\rangle = \hat{S}_z\,|z\rangle = \mathrm{sign}(z)\frac{\hbar}{2}\,|z\rangle\ . \tag{10}$$

Was passiert, wenn Sie einen Zustand um $\vartheta = 2\pi$ drehen?

Aufgabe 2 Delta-Funktion

Ein in der QM sehr nützliches Konzept ist die von Dirac eingeführte Delta-Funktion. Sie wird uns ermöglichen Vollständigkeitsrelationen in Funktionensystemen mit kontinuierlichen Variablen darzustellen. Gleichzeitig können wir mit Hilfe der Delta-Funktion Projektionen auf ausgewählte Orte durchführen, was bei der Definition Green'scher Funktionen hilfreich sein wird. Streng mathematisch ist die Delta-Funktion eine Distribution, d.h. ein linearer (Integral) Operator der durch seine Wirkung auf einen geeigneten Raum von Testfunktionen definiert ist. Im Folgenden werden wir auf mathematische Strenge verzichten, und definieren die Delta-Funktion $\delta(x)$ durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\delta(x) = f(0) \tag{11}$$

für beliebige bei $x=0$ stetige $f(x)$. D.h. die Delta-Funktion "pickt" im Integral den Funktionswert von $f(x)$ bei $x=0$ heraus. Punktweise ausgedrückt bedeutet dies:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{für } x \neq 0, \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x) = 1. \tag{12}$$

(2.a) (**5 Punkte**) Eine Möglichkeit die Delta-Funktion darzustellen, ist durch eine Folge von Funktionen $\delta_n(x)$ mit den Eigenschaften:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta_n(x) = 1, \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\delta_n(x) = f(0). \tag{13}$$

Zeigen Sie die erste Eigenschaft (Normierung) ohne Verwendung von Integraltafeln o.ä. (Hinweis: Residuenkalkül) für die folgenden Funktionenreihen:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2n} \\ n, & x \leq -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 0, & x > \frac{1}{2n} \end{cases} \tag{14}$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}, \tag{15}$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2} \tag{16}$$

$$\delta_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\pi x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} dt\ e^{ixt} \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

Zeigen Sie außerdem die zweite Eigenschaft für die erste Funktionenfolge (Sie dürfen annehmen, dass $f(x)$ in einer Umgebung von $x = 0$ durch eine Taylor-Reihe genähert werden kann).

(2.b) (**1 Punkte**) Zeigen Sie, dass $\delta(a(x - x_0)) = \frac{1}{|a|}\delta(x - x_0)$.

(2.c) (**2 Punkte**) Zeigen Sie für f mit $f'(x)$ stetig bei $x = 0$, dass:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta'(x) f(x) = -f'(0). \tag{19}$$

(2.d) (**2 Punkte**) Zeigen Sie für eine Funktion f mit einfachen Nullstellen x_i (wieso?), deren Ableitung bei x_i stetig ist, dass:

$$\delta\left(f(x)\right) = \sum_i \left|f'(x_i)\right|^{-1} \delta(x - x_i) \tag{20}$$