1. Einführung & Einleitung

- Physik: In beobachtbaren Naturvorgänge

  Gesetzmäßigkeiten / Zusammenhänge erkennen

  und durch wenige Grundprinzipien erklären

- Konzept der Physik:

$$\begin{tikzcd} \text{Modell / Theorie} \arrow[r] & \text{Vorhersage} \arrow[d] \\ \text{Beobachtung} \arrow[u] & \text{Experiment} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

- Makroskopische Phänomene

  $\updownarrow$

  Mikroskopische Phänomene

- Beschreibung der Natur erfordert

  Naturkonstanten

z.B.:
Feinstruktur-konstante $\alpha = \dfrac{e^2}{4\pi \hbar c \varepsilon_0} \approx 1/137$

Elementarladung e : $C = As$
Lichtgeschwindigkeit c : m/s
Vakuum Dielektrizitäts-konst. ε_0 : $\dfrac{As}{Vm} = \dfrac{C^2}{Jm}$
Planck Wirkungsquantum $\hbar$: $J \cdot s$

α ist ein Zahl ohne Einheit

"Natürliche" Wahl der dimensionsbehafteten Größen:

$c = 1$
$\hbar = 1$
$\varepsilon_0 = 1$
$\rightarrow e = \sqrt{4\pi\alpha}$

$\dfrac{1}{\alpha} = 137.- = 111 \cdot 1{,}23456789$

ist "Numerologie", da kein Modell / keine Theorie damit verbunden ist, also auch keine Vorhersagekraft

1.1 Basiseinheiten, Basisgrößen

(SI-System, mks-System)

Größe	übl. Symbol	Name	Abk.
Länge	ℓ	Meter	m

$1\,m \mathrel{\hat{=}}$ Lichtstrecke in $\frac{1}{299792458{,}0}\,s$

$c := 299792458{,}0 \frac{m}{s}$

Größe	übl. Symbol	Name	Abk.
Zeit	t	Sekunde	s
Masse:	m	Kilogramm	kg
Stoffmenge	n	Mol	mol
Temperatur	T	Kelvin	K
elektr. Stromstärke	I	Ampère	A
Lichtstärke	I	Candela	cd
(Raum-)Winkel	Ω	Steradiant	sr

1.2 Dezimalvorsätze

Vorsatz	Wert	Abk.	Vorsatz	Wert	Abk.
Centi	$10^{-2} = 0{,}01$	c	Hekto	$10^{+2} = 100$	h
Milli	$10^{-3} = 0{,}001$	m	Kilo	$10^{+3} = 1000$	k
Mikro	$10^{-6} = \ldots$	μ	Mega	10^{+6}	M
Nano	10^{-9}	n	Giga	10^{+9}	G
Pico	10^{-12}	p	Tera	10^{+12}	T
Femto	10^{-15}	f	Peta	10^{+15}	P
Atto	10^{-18}	a	Exa	10^{+18}	E
⋮			⋮		

Beachte: Doppelte Dezimalvorsätze sind unzulässig

1.3 Messung und Messunsicherheit

- Physikal. Messgröße = (Messzahl ± Unsicherheit) · Einheit
- keine Messung ohne Unsicherheit
- Messfehler
  - ▶ quantifizieren Unsicherheit einer Messung
  - ▶ erlauben Interpretation einer Messung
- Arten von Messfehler
  - ▶ systematische Fehler
    - Eichung der Messapparatur
    - Durchführung des Messvorgangs
    - → Abänderung / Verbesserung des Messaufbaus
    - → können zu systematisch falschen Messwerten führen
  - ▶ statistische Fehler
    - Ableseungenauigkeiten
    - unkontrollierbare Störungen
    - Zufälligkeit des untersuchten Prozesses
    - → reduzierbar durch mehrfache Wiederholung der Messung

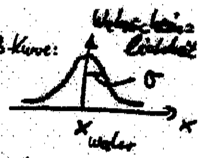
1.3.1 (Ein wenig) Statistik

- (arithmetischer) Mittelwert

$$\boxed{\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \xrightarrow{n\to\infty} x_{wahr}$$

- Einzelwerte streuen um x_{wahr}

Gauß-Kurve:



wenn x_{wahr} durch $\bar{x}$ approximiert wird,

dann ▶ $$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2}}$$

Standardabweichung der Einzelmessung

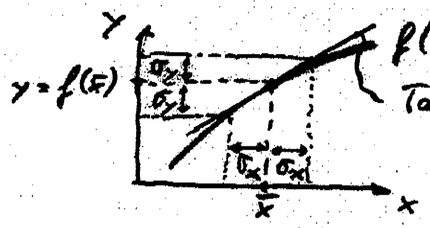
▶ $$\boxed{\sigma_m := \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

mittlere statistische Fehler des arithmetischen Mittelwertes

(Standardabweichung des Mittelwertes)

1.3.2 Fehlerfortpflanzung

- zu bestimmende Größe $y = f(x)$ ← Messgröße



$f(x)$ – Tangente an Funktion $f(\bar{x})$

Steigung: $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}}$

$$\underbrace{\sigma_y}_{\text{Fehler auf berechnete Größe}} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}} \cdot \underbrace{\sigma_x}_{\text{z.B. Fehler des Mittelwertes der Messgröße } x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_y = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}} \cdot \sigma_x}$$

- allg.: $y = f(\underbrace{x_1, \ldots, x_N}_{N \text{ verschiedene Messgrößen}})$

Gaußsche Fehlerfortpflanzungsformel

$$\boxed{\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right)^2 \sigma_{x_N}^2}$$

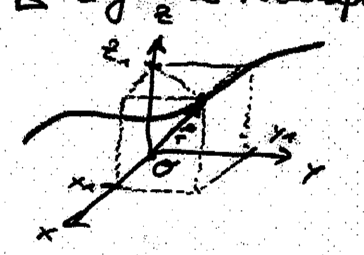
2. Kinematik eines Massenpunktes

Kinematik untersucht Ablauf der Bewegung

Bewegungen: Translation, Rotation

- Beschreibung der Bewegung

▷ Lage des Massenpunktes in kartesischen Koordinaten



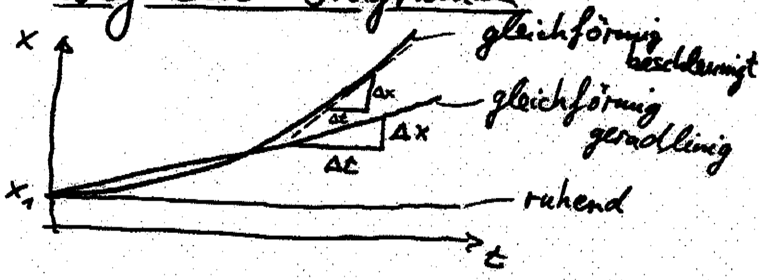
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

andere Koordinatensysteme:

- Kugelkoordinaten (R, φ, Θ)
- Zylinder – " – (R, φ, z)

Weg-Zeit-Diagramm



- Geschwindigkeit : $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

  Durchschnittsgeschwindigkeit $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

  (Momentan-)Geschwindigkeit $v := \frac{dx}{dt} =: \dot{x}$

- Beschleunigung : $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

  (Momentan-) Beschleunigung : $a := \frac{dv}{dt} =: \dot{v}$

  $\Rightarrow a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} =: \ddot{x}$

- <u>Bewegungsgesetze (1-dim)</u>

  gleichförmig beschleunigte Bewegung

  $$\boxed{a(t) = a = const}$$

  $a(t) = \frac{dv}{dt} \rightarrow v(t) = \int a(t')dt' = \int a\,dt' = a \cdot t + const'$

  $$\boxed{v(t) = a \cdot t + v_0}$$

  $v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow x(t) = \int v(t')dt' = \int (a \cdot t' + v_0)dt'$

  $= \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + const''$

  $$\boxed{x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0}$$

  Die Werte a, v_0, x_0 sind Startwerte;

  z.B. gleichförmige Bewegung : $a \overset{!}{=} 0$

  $x(t) = v_0 t + x_0$

  $v(t) = v_0$

  $a(t) = 0$

- <u>Bewegung in Ebene / Raum</u>

  - Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung sind Vektoren

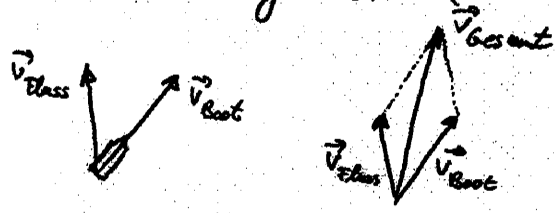
    $\vec{r}(t)\,,\ \vec{v}(t)\,,\ \vec{a}(t)$

    $$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}}(t)$$

    $$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

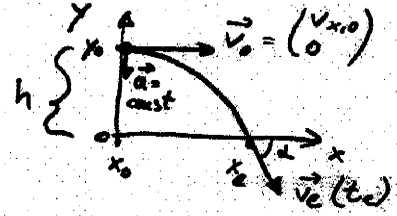
Superpositionsprinzip

Gleichzeitig verlaufende Bewegungen überlagern sich ungestört und addieren sich geometrisch



$$\vec{v}_{Gesamt} = \vec{v}_{Fluss} + \vec{v}_{Boot}$$

- <u>Anwendungsbeispiel: waagrecht Wurf</u>



$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

Startwerte: $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$, $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 0 \cdot t^2 + v_{x,0}\cdot t + 0 \\ -\frac{1}{2}g t^2 + 0 \cdot t + h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x,0}\cdot t \\ -\frac{1}{2}g t^2 + h \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \begin{pmatrix} x_e \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Auftreffpunkt}$$

$$\Rightarrow \quad v_{x,0}\cdot t_e \overset{!}{=} x_e \quad \text{und} \quad -\frac{1}{2} g t_e^2 + h \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad t_e^2 = \frac{2h}{g} \rightarrow \boxed{t_e = \sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad \text{Flugzeit}$$

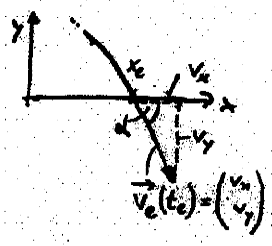
$$\rightarrow \boxed{x_e = v_{x,0}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad \text{Wurfweite}$$

$$\vec{v}_e(t_e) = \vec{a}\cdot t_e + \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t_e + \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{v}_e(t_e) = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ -\sqrt{2gh} \end{pmatrix}} \quad \text{Auftreffgeschwindigkeit}$$

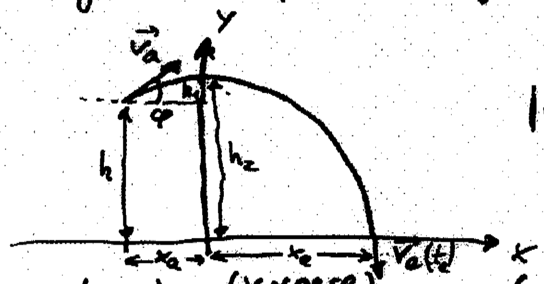
$$\rightarrow |\vec{v}_e(t_e)| = \sqrt{v_{x,0}^2 + 2gh}$$ Absolutbetrag der Auftreffgeschwindigkeit

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-\sqrt{2gh}}{v_{x,0}}}$$



<u>Auftreffwinkel</u> α

► <u>"2× waagerechte Wurf → schräger Wurf</u>



$$|\vec{v}_a| =: v_0$$

$$\vec{v}_a(t=0) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\varphi \\ v_0 \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ +\sqrt{2gh_1} \end{pmatrix} \longleftarrow (*)$$

$$\vec{v}_e(t=t_e) = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ -\sqrt{2gh_2} \end{pmatrix}$$

$$x_a = v_{x,0} \cdot \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \quad ; \quad x_e = v_{x,0}\sqrt{\frac{2h_2}{g}}$$

$$\longrightarrow x_w = x_a + x_e = v_{x,0} \cdot \left(\sqrt{\frac{2h_1}{g}} + \sqrt{\frac{2h_2}{g}} \right)$$

$$\text{aus } (*) \longrightarrow v_0 \cdot \sin\varphi = \sqrt{2gh_1} \longrightarrow h_1 = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\varphi}{2g}$$

$$h_2 = h + h_1 \longrightarrow h_2 = h + \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\varphi}{2g}$$

$$\longrightarrow x_w = v_0 \cos\varphi \cdot \left(\frac{v_0 \sin\varphi}{g} + \sqrt{\frac{2gh}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2\varphi}{g^2}} \right)$$

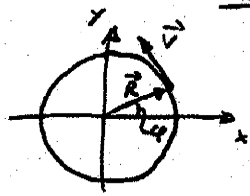
<u>Wurfweite</u>

$$\boxed{x_w = \frac{v_0^2 \cos\varphi \cdot \sin\varphi}{g} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2\varphi}} \right)}$$

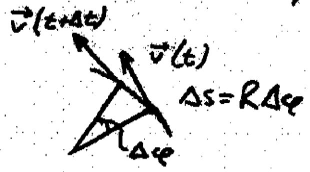
$$\cos\varphi \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

NB: Symmetrien in einer Bewegung können zu einer einfachen Lösung der Bewegungsgleichungen führen

Kreisbewegungen



Winkel φ ; üblicherweise in radian (rad)
($360° \mathrel{\hat=} 2\pi$ rad, $1° \mathrel{\hat=} 0.01745$ rad)



- Winkelgeschwindigkeit ω

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta(R\varphi)}{\Delta t} \rightarrow \frac{d(R\varphi)}{dt} = \underbrace{\frac{dR}{dt}}_{=0}\cdot\varphi + R\cdot\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\rightarrow \quad v = R\cdot\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\boxed{\omega := \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R}} = \dot{\varphi}$$

- Umlauffrequenz : $f := \frac{\omega}{2\pi}$ $\quad \left[\frac{1}{s}\right] \mathrel{\hat=} [Hz]$
- Umlaufzeit, Periode : $T := \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$
- Vektordarstellung der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \qquad \vec{v} \perp \vec{\omega}, \vec{R}$$

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}||\vec{R}|\cdot \sin\sphericalangle(\vec{\omega},\vec{R})$$

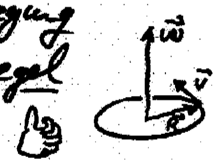
$$\vec{\omega} = \frac{1}{R^2}(\vec{R}\times\vec{v}) \qquad \text{folgt aus} \quad \vec{R}\times\vec{v} = \vec{R}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})$$

"bac-cab"-Regel : $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{c})}_{} - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$

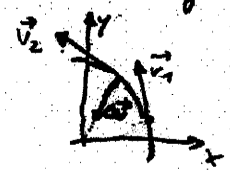
Skalarprodukt: $\vec{a}\cdot\vec{c} = |\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{c})$

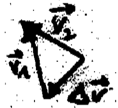
$\vec{\omega} \perp \vec{v}, \vec{R}$, d.h. senkrecht auf Ebene der Kreisbewegung

Richtung von $\vec{\omega}$: Rechte-Hand-Regel



- Kreisbewegungen mit konstantem $\vec{\omega}$ sind gleichförmig beschleunigt





$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| =: v$

$\Delta\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{R}$ (antiparallel)

$$\boxed{\vec{a}_z = -\omega^2\vec{R} = -\frac{v^2}{R^2}\cdot\vec{R}}$$ Zentripetal-beschleunigung

$$\vec{a}_{konst} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\cdot\vec{e}_\varphi)$$

$$= \underbrace{\frac{dv}{dt}\cdot\vec{e}_\varphi}_{\rightarrow \text{Winkelbeschleunigung (hier } = 0)} + \underbrace{v\,\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}}_{=: \vec{a}_z}$$

$$|\vec{e}_\varphi| = \vec{e}_\varphi^{\,2} = 1 \rightarrow 0 = \frac{d(\vec{e}_\varphi^{\,2})}{dt} = 2\vec{e}_\varphi\cdot\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \vec{e}_\varphi \perp \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$$

und $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \parallel \vec{e}_r$ (parallel)

$\vec{e}_\varphi$ rotiert mit $\omega \rightarrow \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$ rotiert mit ω

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\omega\,\vec{e}_r \rightarrow \vec{a} = v\cdot\dot{\vec{e}}_\varphi = (\omega\cdot R)\cdot(-\omega\vec{e}_r) = -\omega^2\cdot R\vec{e}_r = -\omega^2\vec{R}$$

3 Newtonsche Mechanik

Dynamik: untersucht Gründe einer Bewegungsänderung

- Ursachen: Kräfte
  - Kräfte sind Vektoren
  - Superpositionsprinzip für Kräfte (Vektoraddition)

3.1 Newtonsche Axiome

- 1. Newtonsches Axiom: Trägheitsprinzip

  Maß für Bewegungszustand: $\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$ Impuls

  1. Newton. Axiom: $\vec{p} = const$

- 2. Newtonsches Axiom: Aktionsprinzip

  $$\boxed{\vec{F} := \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \underbrace{m\dot{\vec{v}}}_{m \cdot \vec{a}} + \underbrace{\dot{m} \cdot \vec{v}}_{\text{Raketenantrieb}}$$

  $\xrightarrow{m = const}$ $\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$

- 3. Newtonsche Axiom: Reaktionsprinzip

  $\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$ actio = reactio

Kraft: $\vec{F} = m\vec{a}$

Einheit der Kraft: $1\,kg\frac{m}{s^2} =: 1N$, Newton

3.2 Impulserhaltung

- Ein Abgeschlossenes System erfährt keine Kräfte von außen und übt keine Kräfte nach außen aus

$\rightarrow \vec{F}_{geschl.Sys} = 0$

$\rightarrow \frac{d\vec{p}_{geschl.Sys}}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{\vec{p}_{geschl.Sys} = const.}$

Impulserhaltung

NB: Das abgeschlossene System kann aus N Körpern bestehen, die untereinander Kräfte $\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$ ausüben

$\rightarrow 0 = \vec{F}_{geschl.Sys} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$

$\longrightarrow \vec{p}_{geschl.Sys} = \boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = const.}$

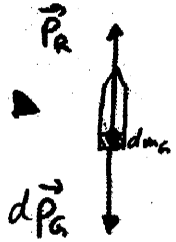
Impulserhaltungssatz

z.B.: $N = 2 \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const$

$\rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(const) = 0$

$\rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \longrightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

3.2.1 <u>Beispiel zur Impulserhaltung: Raketenantrieb</u>



$$\vec{p}_R + d\vec{p}_G = const. = m \cdot \vec{v}_R + dm_G \cdot \vec{v}_G$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{p}_R}{dt} + \frac{d\vec{p}_G}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}\left(m \cdot \vec{v}_R\right) + \frac{dm_G}{dt} \cdot \vec{v}_G$$

$$= \left(\dot{m}\vec{v}_R + m\dot{\vec{v}}_R\right) + \underbrace{\dot{m}_G}_{= -\dot{m}} \vec{v}_G$$

$$= \dot{m}\vec{v}_R + m\dot{\vec{v}}_R - \dot{m}\vec{v}_G$$

$$= m\dot{\vec{v}}_R + \dot{m}\left(\vec{v}_R - \vec{v}_G\right)$$

Ausströmgeschwindigkeit: $\vec{v}_r := \vec{v}_R - \vec{v}_G$ (Relativgeschwindigkeit)

$$\rightarrow \dot{\vec{v}}_r = \dot{\vec{v}}_R - \dot{\vec{v}}_G = 0$$

$$\longrightarrow \vec{F}_{ges} = 0 = m\dot{\vec{v}}_R + \dot{m}\vec{v}_r$$

- Füge Gravitionskraft auf Rakete hinzu:

$$\longrightarrow \vec{F}_G = -m\vec{g} = m\dot{\vec{v}}_R + \dot{m}\vec{v}_r$$

in 1 dim: $\quad -mg = m\dot{v}_R + \dot{m}v_r$

$$-mg = m\frac{dv_R}{dt} + \frac{dm}{dt}v_r \qquad \Big| \cdot \text{"}dt\text{"}$$

Separation der Veränderlichen $\Rightarrow -mg\,dt = m\,dv_R + dm \cdot v_r \;\Big|\cdot \frac{1}{m}$

$$\rightarrow -g\,dt = dv_R + \frac{dm}{m} \cdot v_r$$

$$\rightarrow dv_R = -v_r\frac{dm}{m} - g\,dt$$

Integration von $t=0$ bis zur Brenndauer T $\Rightarrow \int_{v_0}^{v_R(T)} dv_R = -\int_{m_0}^{m(T)} v_r \frac{dm}{m} - \int_0^T g\,dt$

$$\rightarrow v_R\Big|_{v_0}^{v_R(T)} = -v_r\left[\ln m\right]_{m_0}^{m(T)} - gt\Big|_0^T$$

$$\rightarrow v_R(T) - v_0 = -v_r\left[\ln m(T) - \ln m_0\right] - gT$$

$$\rightarrow \boxed{v_R(T) = v_0 - v_r \ln\frac{m(T)}{m_0} - gT}$$

<u>Raketengleichung</u>

3.3 Beispiele für Kräfte

- Kräfte bei Kreisbewegungen

▶ Zentripetalkraft durch Zentripetalbeschleunigung

$$\vec{a}_Z = -\frac{v^2}{R^2}\cdot\vec{R} \;\rightarrow\; \boxed{\vec{F}_Z = m\,\vec{a}_Z = -m\frac{v^2}{R^2}\vec{R}}$$

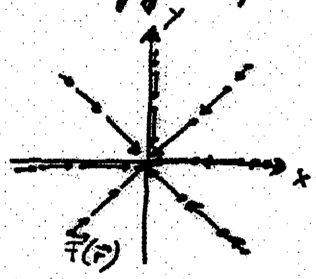
Zentripetalkraft

NB: $\vec{F}_Z = \vec{F}_Z(\vec{R})$ ist ortsabhängige Kraft

$\rightarrow$ Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$

z.B. $\vec{F}(\vec{r}) \sim \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$

mit $\vec{r} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

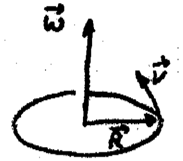


$\rightarrow$ Zentralkraftfeld

NB: 3. Newton. Axiom: $\vec{F}_{Zentripetal} = -\vec{F}_{Zentrifugal}$

Zentrifugalkraft

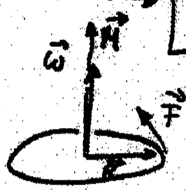
▶ Beschleunigung / Verzögerung der Kreisbewegung



$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{R} \rightarrow \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{R})$$
$$= \dot{\vec{\omega}}\times\vec{R} + \vec{\omega}\times\dot{\vec{R}}$$
$$\vec{F} = m\vec{a} = m\cdot(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{R} + \vec{\omega}\times\dot{\vec{R}})$$

Betrachte: $\vec{R}\times\vec{F} = \vec{R}\times m\vec{a} = m\cdot\vec{R}\times(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{R} + \vec{\omega}\times\dot{\vec{R}})$

$$= \ldots = mR^2\cdot\dot{\vec{\omega}}$$



$\rightarrow \boxed{\vec{M} := \vec{R}\times\vec{F} = mR^2\,\dot{\vec{\omega}}}$ Drehmoment

$\vec{R}\times\vec{F} = \vec{M} \parallel \vec{\omega}$

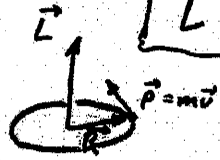
$\vec{M} \perp \vec{R}, \vec{F}$

▶ Impuls der Kreisbewegung:

$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{R}$

$\vec{p} = m\cdot\vec{v} = m\cdot\vec{\omega}\times\vec{R}$

Betrachte: $\vec{R}\times\vec{p} = m\vec{R}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}) = \ldots = mR^2\vec{\omega}$



$\boxed{\vec{L} := \vec{R}\times\vec{p} = mR^2\cdot\vec{\omega}}$ Drehimpuls

□ NB: Drehimpulserhaltung in abgeschlossenen Systemen

□ NB: $\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{R}\times\vec{p}) = \underbrace{\dot{\vec{R}}\times\vec{p}}_{=0,\ da\ \dot{\vec{R}} = \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}} + \vec{R}\times\underbrace{\dot{\vec{p}}}_{\vec{F}}$

$\rightarrow \boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{R}\times\vec{F} = \vec{M}}$

□ NB: Zentralkräfte mit $\vec{F} \sim \vec{R}$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{R} \times \dot{\vec{p}} = \vec{R} \times \underbrace{\vec{F}}_{\vec{F} \parallel \vec{R}} \sim \vec{R} \times \vec{R} = 0$$

$\rightarrow \boxed{\dot{\vec{L}} = 0}$

ändern Drehimpuls <u>nicht</u>!

- Federkräfte:

  Hookesches Gesetz: $\boxed{\vec{F}_r = -D\vec{x}}$ D: Richtgröße Federkonstante [N/m]

  → Anwendung als Kraftmesser

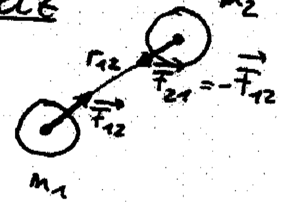
- Reibungskräfte:

  Haft-, Gleit-, Roll-, Luft-, … -Reibung

- <u>Gravitationskraft</u>

  ▶ <u>Newtonsches Gravitationsgesetz</u>

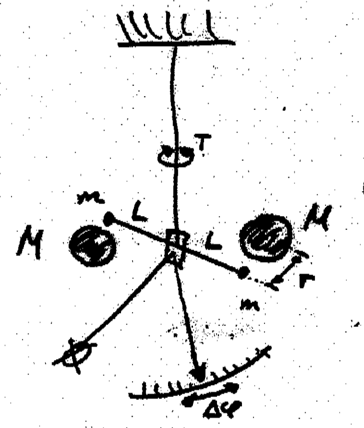
$$\boxed{F_G = G_N \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}}$$



(CODATA) $G_N = 6.6742 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

Bestimmung der Gravitationskonst. G_N

<u>Torsionspendel:</u> (Cavendish, Eötvös)



$$F_G = G_N \cdot \frac{mM}{r^2}$$

Drehmoment M_D $\boxed{M_D = 2L \cdot F_G = D^* \cdot \Delta\varphi/2}$

D^*: Winkelrichtgröße

$$D^* = \frac{4\pi^2 \cdot m \left(L^2 + \frac{2}{5} R_m^2\right)}{T^2}$$

$$G_N = \frac{D^* \cdot \Delta\varphi/2 \cdot r^2}{2L \cdot mM} \approx \frac{\pi^2 L \cdot \Delta\varphi \cdot r^2}{T^2 \cdot M} \quad (R_m \ll L)$$

$L = 50$ mm

$m = 38.3$ g

$M = 1.5$ kg

$R_m = 9.5$ mm (Radius der Kugeln m)

$T = 496$ s (Schwingungsdauer)

Messung: $\rightarrow \Delta\varphi = \frac{8.34 \text{ mm}}{400 \text{ mm}} \approx 0.0209$ rad $\rightarrow$ $G_N \approx 6.029 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 kg}$

$r = 46.5$ mm

$1N = 1 kg \frac{m}{s^2} \rightarrow \frac{Nm^2}{kg^2} = \frac{\cancel{kg}\, m}{s^2} \cdot \frac{m^2}{kg^{\cancel{2}}} = \frac{m^3}{s^2 kg}$

▶ Erde : Gravitationskraft ist ortsabhängige Zentralkraft

$$\vec{F}_G = - G_N \frac{m \cdot M_E}{r^2} \vec{e}_r$$

NB: Kann Masse als in einem Punkt konzentriert betrachten $\longrightarrow$ Punktmasse

3.3.1 Bewegungsgleichungen mit Kräften

- ortsunabhängige Kräfte : $\vec{F} \neq \vec{F}(\vec{r})$

  2. Newtonsches Axiom $\rightarrow$ $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}}$

  $$\rightarrow \vec{v}(t) = \frac{1}{m} \underbrace{\int \vec{F} dt}_{\text{Kraftstoß}} + \vec{v}_0$$

  $$\rightarrow \vec{r}(t) = \int \vec{v} dt + \vec{r}_0 = \ldots$$

- ortsabhängige Kräfte : $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

  z.B. Gravitationskraftfeld

  ▶ radiale Bewegung : $\vec{a}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_G(\vec{r})}{m} = - G_N \cdot \frac{M_E}{r^2} \vec{e}_r$

  $$\longrightarrow a(r) = - G_N \frac{M_E}{r^2}$$

  z.B. Erdoberfläche : $r = R_E = 6378.140$ km

  $a(r = R_E) = g = 9.80665 \frac{m}{s^2}$

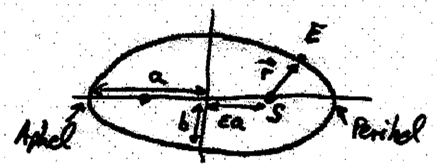
  $$\longrightarrow \boxed{M_E \simeq 5.977 \cdot 10^{24} kg}$$

NB: Erdbeschleunigung für alle Körper gleich!

▶ geschlossene Bahnkurven

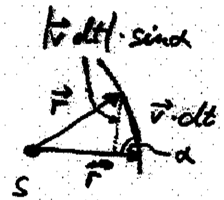
$\longrightarrow$ Planetenbahnen : Kepler Gesetze

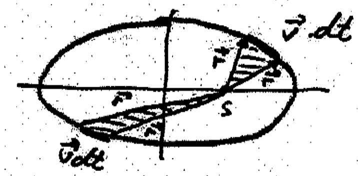
1. Planeten bewegen sich auf Ellipsen
   Sonne in einem Brennpunkt der Ellipse



a: große Halbachse
b: kleine Halbachse
ε: Exzentrizität
(ε=0 : Kreis)

2. Radiusvektor (Fahrstrahl) Sonne → Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen





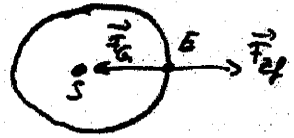
Dreiecksfläche: $dA = \frac{1}{2} |\vec{r}| \cdot |\vec{v} dt| \cdot \sin\alpha$

$= \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| \, dt$

$$\rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times \vec{p}| = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{const}$$

$\rightarrow$ Drehimpulserhaltung $|\vec{L}| = \text{const}$

3. Quadrate der Umlaufzeiten T
$\Longleftrightarrow$ dritte Potenz der großen Halbachse



$$F_G = G_N \frac{M_E \cdot M_S}{r^2} \overset{!}{=} M_E \omega^2 \cdot r = F_{Zf}$$

$$\rightarrow \quad \frac{G_N \cdot M_S}{r^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$\rightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G_N M_S} = \text{const.}$$

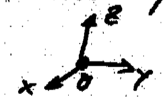
NB: $$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2 \cdot (M_S + m_1)}{T_2^2 \, (M_S + m_2)} \propto \frac{T_1^2}{T_2^2}$$

für Planeten 1,2 mit Berücksichtigung der Sonnenmasse M_S

- offenen Bahnkurven:
  Hyperbelbahnen (, Parabelbahnen)

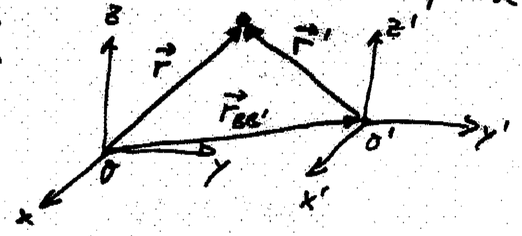
4 Beschleunigte Bezugssysteme

Bezugssystem: Koordinatensystem mit Ursprung O



Zwei Beobachter B, B' $\underset{\text{Transformation}}{\longleftrightarrow}$ Zwei Bezugssysteme

z.B.



$$\vec r\,' = \vec r - \vec r_{BB'}$$
$$\vec v\,' = \dot{\vec r}\,' = \dot{\vec r} - \dot{\vec r}_{BB'} = \vec v - \vec v_{BB'}$$
$$\vec a\,' = \dot{\vec v}\,' = \ddot{\vec r}\,' = \ddot{\vec r} - \ddot{\vec r}_{BB'}$$

- gleichförmig bewegtes Bezugssystem B':
  $\ddot{\vec r}_{BB'} = 0$, $\dot{\vec r}_{BB'} \neq 0$

$\rightarrow$ Relativgeschwindigkeit $\vec u$ zwischen B und B':
$$\vec u := \dot{\vec r}_{BB'}$$

$\rightarrow$ Inertialsysteme

$\rightarrow$ Galilei-Transformation zwischen Inertialsystemen

$$\vec r = \vec r\,' + \vec u \cdot t$$
$$\vec v = \vec v\,' + \vec u$$
$$\vec a = \vec a\,' \quad \longrightarrow \quad \vec F = \vec F\,'$$
$$t = t'$$

NB: Nur gültig, falls $|\vec u| \ll c$

4.1 geradlinig beschleunigte Bezugssysteme

geradlinig beschleunigt: $\dot{\vec{u}} = \vec{a}_{BB'} = const \neq 0$

$\longrightarrow \quad \vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_{BB'} \quad \longrightarrow \quad \vec{F} \neq \vec{F}\,'$

$\int dt \rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}\,' + \vec{a}_{BB'} \cdot t + \underbrace{\vec{u}_0}_{\text{Relativgeschwindigkeit zw. B und B' bei } t=0}$

$\int dt \rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \frac{1}{2}\vec{a}_{BB'} \cdot t^2 + \vec{u}_0 \cdot t + \underbrace{\vec{r}_0}_{\text{relativer Ort zw. B, B' bei } t=0}$

NB: B' ist <u>kein Inertialsystem</u>, da beschleunigt

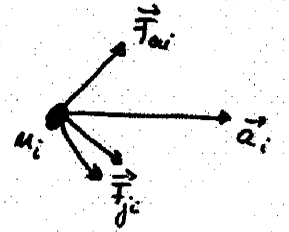
Unterschied zwischen $\vec{F}$ und $\vec{F}\,'$
sind <u>Trägheitskräfte / Scheinkräfte</u>

4.1.1 Prinzip von d'Alembert

- ruhender Beobachter

$$m_i \vec{a}_i = \underbrace{\vec{F}_{ai}}_{\text{äußere}} + \underbrace{\sum_j \vec{F}_{ji}}_{\text{innere}}$$

Kräfte

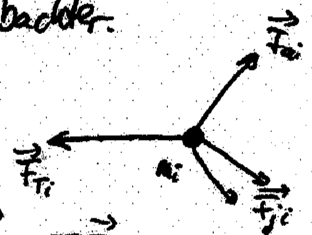


$\rightarrow$ Bewegungsgleichung durch Dynamik des Systems geben

▶ <u>Prinzip von d'Alembert</u>

dynamisches System m_i und $\vec{a}_i$ $\xrightarrow[\vec{F}_{Ti} := -m_i \vec{a}_i]{\text{Trägheitskräfte}}$ statisches System

- mitbewegter Beobachter

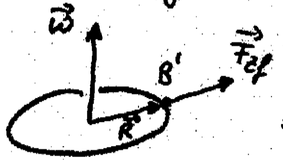


$$m_i \vec{a}_i = -\vec{F}_{Ti} = \vec{F}_{ai} + \sum_j \vec{F}_{ji}$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{F}_{Ti} + \vec{F}_{ai} + \sum_j \vec{F}_{ji} = 0}$$

4.2 rotierende Bezugssysteme

- <u>Zentrifugalkraft</u> ist Trägheitskraft



$$\vec{F}_{zf} = m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}) = m\omega^2\vec{R}$$

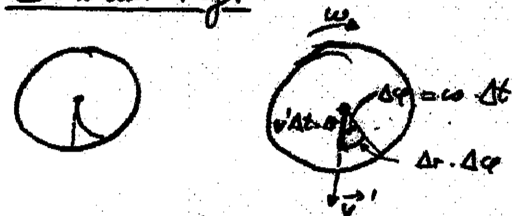
keine äußeren Kräfte:

ruhender Beobachter B : $\vec{F}_{ges} = 0 \quad (\vec{F}_{zp} = -\vec{F}_{zf} \rightarrow \vec{F}_{zp} + \vec{F}_{zf} = 0)$

rotierender Beobachter B' : $\vec{F}'_{ges} = 0 + m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}) = \vec{F}_{zf}$

weil B' mit $\vec{a}_{zp} = \frac{\vec{F}_{zp}}{m}$ beschleunigt

- <u>Corioliskraft</u>



▸ Massenpunkt bewegt sich mit $\vec{v}'$ in der Zeit Δt um

$\Delta r = v'\cdot\Delta t$

▸ Beobachter B' : rotiert in Δt um

$\Delta\varphi = \omega\cdot\Delta t$

Massenpunkt bleibt um

$\Delta r\cdot\Delta\varphi = (v'\Delta t)\cdot(\omega\cdot\Delta t) = v'\omega\cdot(\Delta t)^2$

→ für B' hat Massenpunkt eine Beschleunigung a_c erfahren:

$$\frac{1}{2}a_c\cdot(\Delta t)^2 \stackrel{!}{=} \Delta r\cdot\Delta\varphi = v'\omega\cdot(\Delta t)^2$$

$\rightarrow \boxed{a_c = 2v'\cdot\omega}$ Coriolis-beschleunigung

mit $\vec{a}_c \perp \vec{v}'$, $\vec{a}_c \perp \vec{\omega}$

$\rightarrow \vec{a}_c = 2\vec{v}'\times\vec{\omega}$

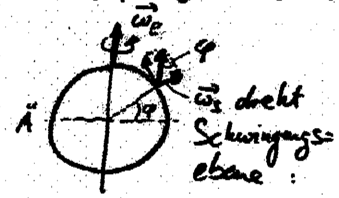
$\boxed{\vec{F}_c = 2\cdot m\,\vec{v}'\times\vec{\omega}}$ Coriolis-kraft

- <u>Zentrifugal</u>- und <u>Corioliskraft</u> sind <u>Scheinkräfte</u> bzw. <u>Trägheitskräfte</u>!

- Beispiel für rotierende Bezugssysteme

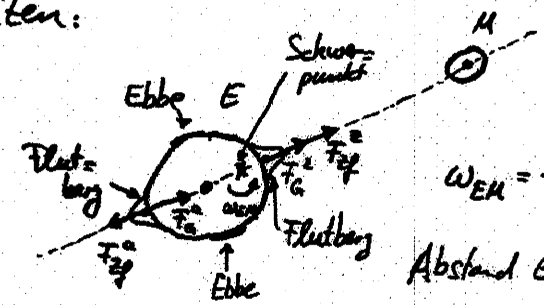
▸ Erdrotation

Nachgewiesen 1850 durch Foucaultsches Pendel



$\omega_S = \omega_E\cdot\sin\varphi$

- Gezeiten:



$$\omega_{EM} = \frac{2\pi}{27.32\,d} = 2.66\cdot 10^{-6}\,\frac{1}{s}$$

Abstand Erde-Mond:

$r_{EM} = 380000\ km$

$R_E = 6378\ km$

$r_s = \frac{M_M}{M_E+M_M}\cdot r_{EM} \approx \frac{3}{4}R_E$

$M_M \simeq \frac{1}{81}M_E$

$$F_G^z = G_N\,\frac{m\cdot M_M}{(r_{EM}-R_E)^2} \approx m\cdot 3.53\cdot 10^{-5}\,\frac{N}{kg}$$

$$F_{zf}^z = m\cdot\omega_{EM}^2\cdot(R_E-r_S) = m\cdot 1.22\cdot 10^{-5}\,\frac{N}{kg}$$

$$F_G^a = G_N\,\frac{m\cdot M_M}{(r_{EM}+R_E)^2} = m\cdot 3.30\cdot 10^{-5}\,\frac{N}{kg}$$

$$F_{zf}^a = m\cdot\omega_{EM}^2\cdot(R_E+r_S) = m\cdot 2.76\cdot 10^{-5}\,\frac{N}{kg}$$

Mondzugewandte Seite:

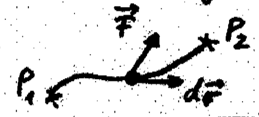
$$F_G^z + F_{zf}^z \simeq m\cdot 4.75\cdot 10^{-5}\,\frac{N}{kg}$$

Mondabgewandte Seite

$$F_{zf}^a - F_G^a \simeq m\cdot 4.46\cdot 10^{-5}\,\frac{N}{kg}$$

- Tief-/Hochdruckgebieten

5 Energie, Arbeit, Leistung



- Arbeit $\boxed{W := \int_{P_1}^{P_2} \vec F\cdot d\vec r} = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z\,dz$

Einheit der Arbeit: Joule, J, $1J \mathrel{\hat=} 1Nm \mathrel{\hat=} 1\frac{kg\,m^2}{s^2}$

NB: Wenn $\vec F \perp d\vec r$, dann $W = 0$!

Beispiel: Kreisbewegung $\vec F_{zp} \perp$ Kreislinie

- Leistung $\boxed{P := \frac{dW}{dt}}$ "Arbeit pro Zeit"

Einheit der Leistung: Watt, W, $1W \mathrel{\hat=} 1\frac{J}{s} \mathrel{\hat=} 1\frac{kg\,m^2}{s^3}$

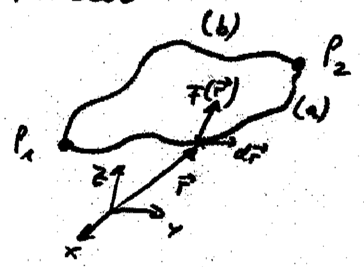
▶ $P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\int \vec F\,d\vec r \underset{d\vec r = \vec v\,dt}{=} \frac{d}{dt}\int \vec F\cdot\vec v\,dt = \vec F\cdot\vec v$

▶ Leistung bei Drehbewegung

$$P = \vec F\cdot\vec v = \vec F\cdot(\vec\omega\times\vec r) = \vec\omega\cdot\underbrace{(\vec r\times\vec F)}_{} = \vec r(\vec F\times\vec\omega)$$

$$= \vec\omega\cdot\vec M$$

- Arbeit und konservative Kraftfelder



$$W = \int \vec{F}\, d\vec{r}$$

Betrachte geschlossenen Weg: $P_1 \xrightarrow{(a)} P_2 \xrightarrow{(b)} P_1$

$$W_a + W_b = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\, d\vec{r}_a + \int_{P_2}^{P_1} \vec{F}\, d\vec{r}_b = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\, d\vec{r}_a - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\, d\vec{r}_b$$

$$\Rightarrow W_a + W_b = \boxed{\oint \vec{F}\, d\vec{r} \overset{!}{=} 0}$$

für konservative Kraftfelder

► Beispiel für konservative Kraftfelder

Zentralkraftfelder $\oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0$

► Gegenteil: dissipative Kraftfelder

- kinetische Energie

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad ; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \longrightarrow d\vec{r} = \vec{v}\, dt$$

$$\longrightarrow W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \left(m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}\right) \cdot \left(\vec{v}\, dt\right) = m \int \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt$$

$$= m \int \vec{v}\, d\vec{v}$$

$$\longrightarrow W = m \frac{(\vec{v})^2}{2} \Big|_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} = \frac{1}{2} m (\vec{v}_2)^2 - \frac{1}{2} m (\vec{v}_1)^2$$

$$=: E_{kin,2} - E_{kin,1} = \Delta E_{kin}$$

$$\boxed{E_{kin} := \frac{1}{2} m v^2}$$ kinetische Energie

- Rotationsenergie für Massenpunkt

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \\ \vec{\omega} \perp \vec{R} \rightarrow v = \omega \cdot R \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{E_{rot} = \frac{1}{2} m (\omega \cdot R)^2 = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \omega^2}$$

Rotationsenergie

- Potentielle Energie in konservativen Kraftfeldern

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\, d\vec{r} =: E_{pot}(P_1) - E_{pot}(P_2) = -\Delta E_{pot}$$

potentielle Energie

► Vorzeichenkonvention:
neg. (pos.) Arbeit bei Bewegung gegen (mit) $\vec{F}$

Vorzeichenkonvention bedeutet

neg. Arbeit $\rightarrow$ Erhöhung von E_{pot}
$\hat{=}$ Energiezufuhr

pos. Arbeit $\rightarrow$ Reduktion von E_{pot}
$\hat{=}$ Körper/Maschine leistet Arbeit

z.B. $\vec{F} = -m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$

$d\vec{r} = \vec{e}_z\, dr$

$$\rightarrow W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2} (-mg\vec{e}_z)\cdot(\vec{e}_z\, dr) = \int_{z_1}^{z_2} -mg\, dr$$

$$\rightarrow W = -mgz_2 - (-mgz_1)$$

$$= mgz_1 - mgz_2 \stackrel{!}{=} E_{pot}(z_1) - E_{pot}(z_2)$$

$$\longrightarrow \boxed{E_{pot}(z) = mgz}$$

- <u>Energieerhaltung</u>

$$\boxed{E_{kin} + E_{pot} + \ldots = const}$$ in konservativen Kraftfeldern

NB: in dissipativen Feldern müssen weitere Energien berücksichtigt werden (z.B. Wärmeenergie)

In abgeschlossenen Systemen bleibt Gesamtenergie konstant

- potentielle Energie und Kraftfeld

$$W = \int \vec{F}\, d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz = -\Delta E_{pot}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\int F_x dx\right)}_{=F_x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\int F_y dy\right)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\int F_z dz\right)}_{=0}$$

analog $\frac{\partial W}{\partial y} = F_y$; $\frac{\partial W}{\partial z} = F_z$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} E_{pot} = -\vec{\nabla} E_{pot} = -\mathrm{grad}\, E_{pot}}$$

Nabla-Operator Gradient

Skalarfeld $E_{pot}(\vec{r})$ beschreibt Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$

Gravitationspotential:

$$\vec{F} = -G_N \frac{m\cdot M}{r^2}\vec{e}_r$$

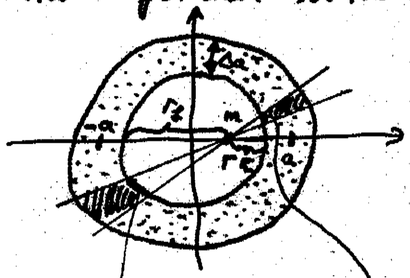
$$\rightarrow W = \int \vec{F}\, d\vec{r} = -\int_R^\infty G_N \frac{m\cdot M}{r^2}\vec{e}_r\, d\vec{r} = -\int_R^\infty G_N \frac{m\cdot M}{r^2}\, dr$$

$$= +G_N \frac{mM}{r}\Big|_R^\infty = -G_N \frac{mM}{R} = E_{pot}(R) - \underbrace{E_{pot}(\infty)}_{:=0}$$

$$\rightarrow E_{pot}(R) = -G_N \frac{m M}{R}$$ potentielle Energie des Gravitationsfeldes

$$\rightarrow \boxed{\Phi(R) = -G_N \frac{M}{R}}$$ Gravitationspotential ($\vec{g} = -\mathrm{grad}\,\Phi$)

- Gravitationspotential in Hohlkugel



$r_f = a + r - \frac{\Delta a}{2}$

$r_n = a - r - \frac{\Delta a}{2}$

Fläche $\Delta A_f \sim r_f^2$ Fläche $\Delta A_n \sim r_n^2$

Massen ~ Volumen $\rightarrow \Delta M_f \sim \Delta A_f \cdot \Delta a \sim r_f^2 \cdot \Delta a$; $\Delta M_n \sim r_n^2 \cdot \Delta a$

pot. Energie ~ $\frac{\text{Masse}}{\text{Abstand}}$ $\rightarrow$ $E_{pot,f} \sim G_N m \frac{\Delta M_f}{r_f}$; $E_{pot,n} \sim G_N \cdot m \frac{\Delta M_n}{r_n}$

Gesamte pot. Energie $\rightarrow$ $\Delta E_{pot} = E_{pot,f} + E_{pot,n}$

$$\sim G_N \cdot m \left(\frac{\Delta M_f}{r_f} + \frac{\Delta M_n}{r_n} \right)$$

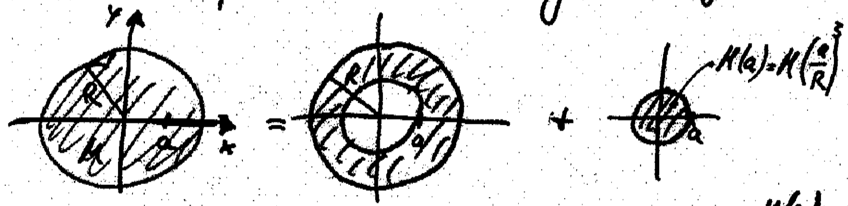
$$\sim G_N m \left(\frac{r_f^2 \cdot \Delta a}{r_f} + \frac{r_n^2 \cdot \Delta a}{r_n} \right)$$

$$\rightarrow \Delta E_{pot} \sim G_N \cdot m \underbrace{\left(r_f + r_n \right)}_{2a - \Delta a} \cdot \Delta a$$

$$\rightarrow \Delta E_{pot} \sim G_N \cdot m \, (2a - \Delta a) \cdot \Delta a = const\,!$$

vollständige Rechnung $\Rightarrow$ $\boxed{E_{pot} = -G_N \frac{m M}{a} = const}$ $\rightarrow$ $\boxed{\vec{F} = -grad\, E_{pot} = 0}$!

- Gravitationspotential in homogener Kugel



$\underbrace{E_{pot} = const}$ $\qquad$ $E_{pot} = -G_N \frac{M(a)}{a} = -G_N \frac{M a^2}{R^3}$

$\rightarrow$ $E_{pot,ges}(a) = const + \left(-G_N \frac{M a^2}{R^3} \right)$

$\rightarrow$ $\vec{F} = -grad\, E_{pot,ges}(a) = \ldots = \begin{pmatrix} +G_N \frac{2 M a}{R^3} \\ \vdots \end{pmatrix}$