

Physik im Querschnitt (n.v.) WS 2020/2021

Ulf Kleineberg

LMU München, Fakultät für Physik

Organisatorisches

Vorlesungstermin und Ort :

Dienstag, 16 – 18 Uhr c.t., Zoom online Videokonferenz (**Vorlesung + Beispiele**)

Freitag, 10 – 12 Uhr c.t., Zoom online Videokonferenz (**Übungen**)

Vorlesungswebseite (mit Folien, Übungen, aktuellen Ankündigungen etc.) :

<http://www.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/index.html>

Das Material ist zugriffsgeschützt, Zugriff über Campus-Kennung + Passwort

Dozent der Vorlesung :

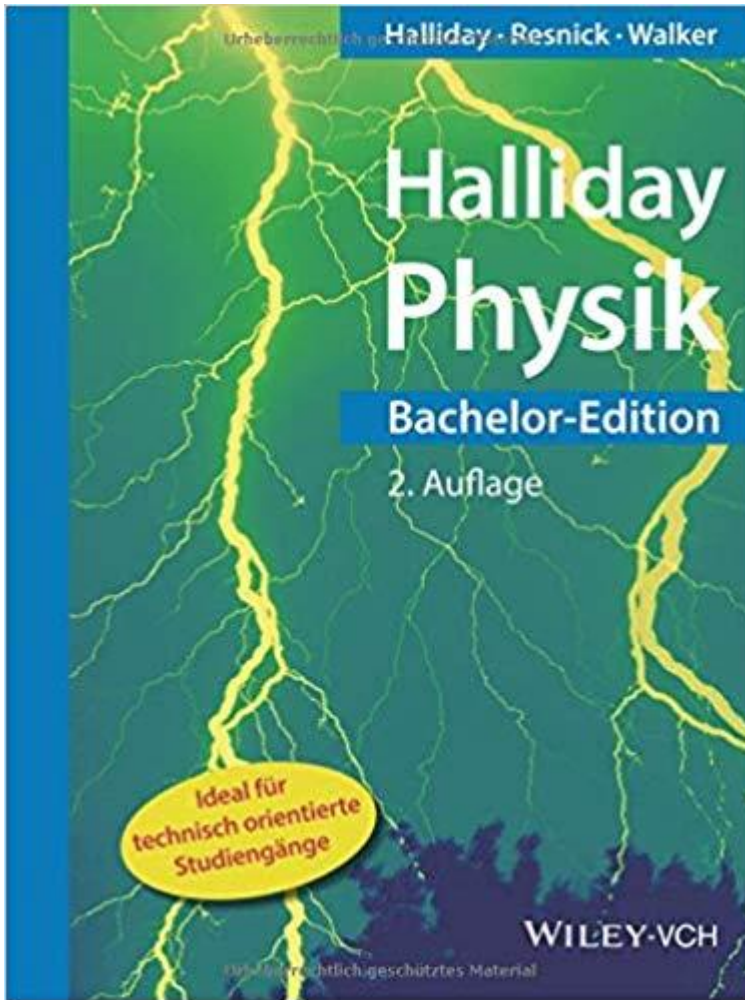
Ulf Kleineberg
Fakultät für Physik der LMU München
AG Atom-und Röntgenphysik
Am Coulombwall 1
85748 Garching

Ulf.kleineberg@physik.uni-muenchen.de

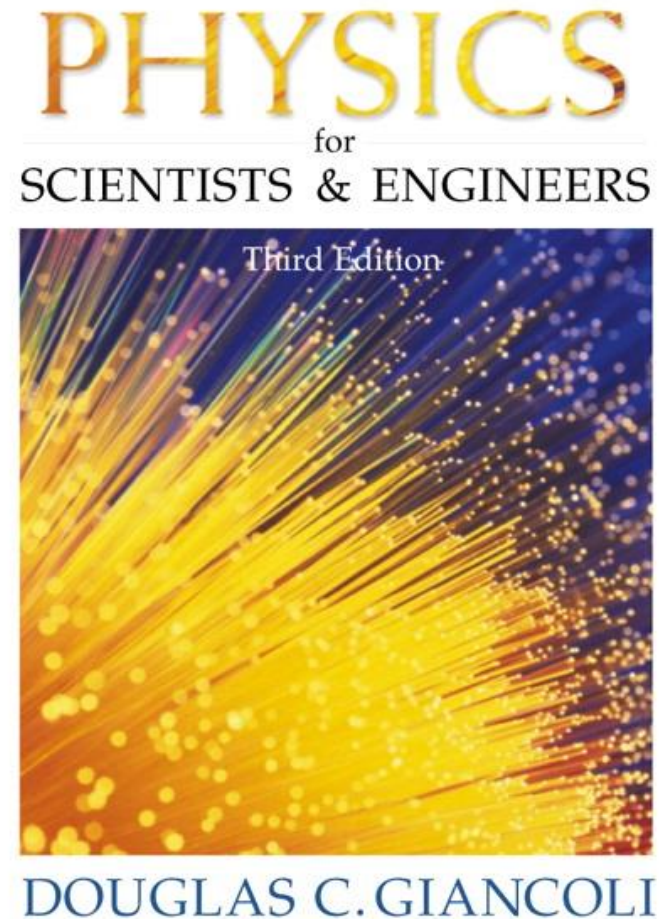
www.xray.physik.uni-muenchen.de

Tel. 089 2891 4003

Literatur zur Vorlesung



Sehr gutes Buch mit vielen Beispielen



Ebenfalls sehr modernes Buch mit vielen Abbildungen und Beispielen

Inhalt

Vorlesung

Übung

- | | | |
|----------------------|---------------|---------------|
| • Mechanik | 03.11./10.11. | 06.11./13.11. |
| • Optik | 17.11./24.11. | 20.11./27.11. |
| • Elektrizitätslehre | 01.12./08.12. | 04.12./11.12. |
| • Festkörperphysik | 15.12./22.12. | 18.12./08.01 |
| • Kernphysik | 12.1./19.1. | 15.1./22.1. |
| • Atom+Molekülphysik | 26.1./02.2. | 29.1./05.2. |
| • Wärmelehre | 09.2. | 12.2. |

I. Mechanik

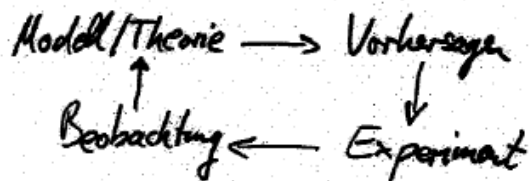
1. Einführung & Einleitung

- Physik: In beobachtbaren Naturvorgängen

Gesetzmäßigkeiten / Zusammenhänge
erkennen

und durch wenige Grundprinzipien erklären

- Konzept der Physik:



- Makroskopische Phänomene



Mikroskopische Phänomene

- Beschreibung der Natur erfordert

Naturkonstanten

e.B.:
Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c \epsilon_0} \approx 1/137$

Elementarladung e : C = As

Lichtgeschwindigkeit c : m/s

Vakuum Dielektrizitätskonst. ϵ_0 : $\frac{As}{Vm} = \frac{C^2}{Jm}$

Planck Wirkungsquantum \hbar : Js

α ist ein Zahl ohne Einheit

"Natürliche" Wahl der dimensionsbehafteten Größen:

$$\begin{aligned} c &= 1 \\ \hbar &= 1 \\ \epsilon_0 &= 1 \\ \rightarrow e &= \sqrt{4\pi\alpha} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\alpha} = 137.035999084 \dots = 111.123456789$$

↑
Ist "Numerologie", da kein Modell/keine Theorie damit verbunden ist, also auch keine Vorhersagekraft

1.1 Basiseinheiten, Basisgröße

(SI-System, m.k.s-System)

Größe	üb. Symbol	Name	Abk.
Länge	l	Meter	m

$1 \text{ m} \hat{=} \text{Lichtstrecke in } \frac{1}{299792458,0 \text{ s}}$

$$c = 299792458,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zeit	t	Sekunde	s
------	-----	---------	---

Masse:	m	Kilogramm	kg
--------	-----	-----------	----

Stoffmenge	n	Mol	mol
------------	-----	-----	-----

Temperatur	T	Kelvin	K
------------	-----	--------	---

elektr. Stromstärke	I	Ampère	A
---------------------	-----	--------	---

Lichtstärke	I	Candela	cd
-------------	-----	---------	----

(Raum-)Winkel	Ω	Stadian	sr
---------------	----------	---------	----

1.2 Dezimalvorsätze

Vorsatz	Wert	Abk.	Vorsatz	Wert	Abk.
Centi	$10^{-2} = 0,01$	c	Hekto	$10^{+2} = 100$	h
Milli	$10^{-3} = 0,001$	m	Kilo	$10^{+3} = 1000$	k
Mikro	$10^{-6} = \dots$	μ	Mega	10^{+6}	M
Nano	10^{-9}	n	Giga	10^{+9}	G
Pico	10^{-12}	p	Tera	10^{+12}	T
Femto	10^{-15}	f	Peta	10^{+15}	P
Atto	10^{-18}	a	Exa	10^{+18}	E
:			:		

Beachte: Doppelte Dezimalvorsätze sind unzulässig

1.3 Messung und Messunsicherheit

- Physikal. Messgröße = (Messzahl ± Unsicherheit) · Einheit
- keine Messung ohne Unsicherheit

• Messfehler

- ▶ quantifizieren Unsicherheit einer Messung
- ▶ erlauben Interpretation einer Messung

• Arten von Messfehler

▶ systematische Fehler

- Eichung der Messapparatur
- Durchführung des Messvorgangs
- Abänderung / Verbesserung des Messaufbaus
- können zu systematisch falschen Messwerten führen

▶ statistische Fehler

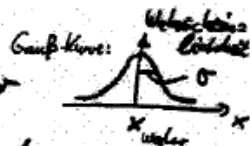
- Ablesungenauigkeiten
- unkontrollierbare Störungen
- Zufälligkeit des untersuchten Prozesses
- reduzierbar durch mehrfache Wiederholung der Messung

1.3.1 (Ein wenig) Statistik

• (arithmetische) Mittelwert

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_{\text{wahr}}$$

- Einzelwerte streuen um x_{wahr} wenn x_{wahr} durch \bar{x} approximiert wird,



dann ▶

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}$$

Standardabweichung der Einzelmessung

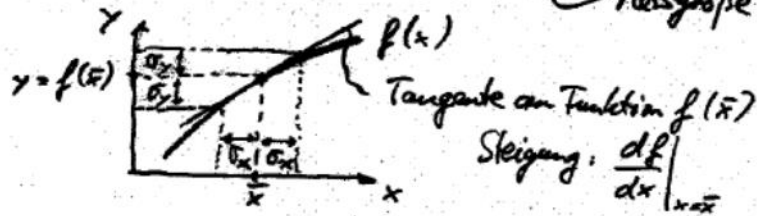
$$\sigma_m := \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

mittlere statistische Fehler des arithmetischen Mittelwertes

(Standardabweichung des Mittelwertes)

1.3.2 Fehlerfortpflanzung

- zu bestimmende Größe $y = f(x)$ Messgröße



Fehler auf berechnete Größe

$$\sigma_y = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} \cdot \sigma_x \quad \text{z.B. Fehler des Mittelwertes der Messgröße } x$$

$$\Rightarrow \sigma_y = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} \cdot \sigma_x$$

- allg.: $y = f(x_1, \dots, x_n)$
 n verschiedene Messgrößen
- Gaußsche Fehlerfortpflanzungsformel

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \sigma_{x_n}^2}$$

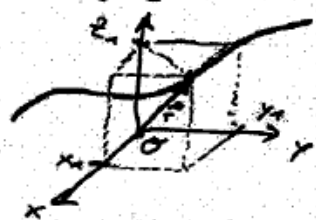
2. Kinematik eines Massenpunktes

Kinematik untersucht Ablauf der Bewegung

Bewegungen: Translation, Rotation

- Beschreibung der Bewegung

▷ Lage des Massenpunktes in kartesischen Koordinaten

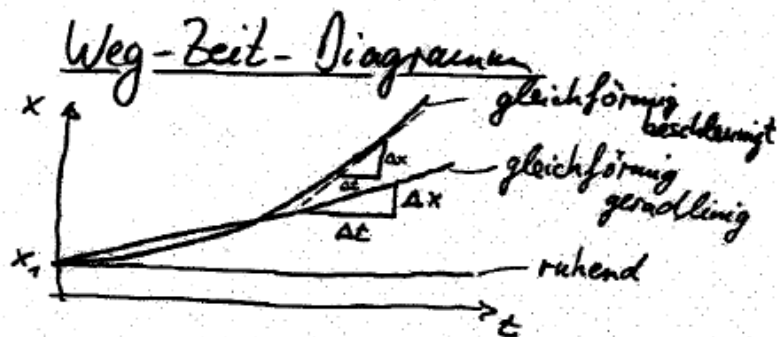


$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

andere Koordinatensysteme:

- Kugelkoordinaten (R, φ, θ)
- Zylinder " " (R, φ, z)



- Geschwindigkeit: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
 Durchschnittsgeschwindigkeit $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
 (Momentan-) Geschwindigkeit $v := \frac{dx}{dt} =: \dot{x}$

- Beschleunigung: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
 (Momentan-) Beschleunigung: $a := \frac{dv}{dt} =: \dot{v}$
 $\Rightarrow a = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2} =: \ddot{x}$

- Bewegungsgesetze (1-dim)
 gleichförmig beschleunigte Bewegung

$$a(t) = a = \text{const}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \rightarrow v(t) = \int a(t') dt' = \int a dt' = a \cdot t + \text{const}'$$

$$v(t) = a \cdot t + v_0$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow x(t) = \int v(t') dt' = \int (a \cdot t' + v_0) dt' = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + \text{const}''$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

- Die Werte a, v_0, x_0 sind Startwerte;
 z.B. gleichförmige Bewegung: $a = 0$

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

$$v(t) = v_0$$

$$a(t) = 0$$

• Bewegung in Ebene/Raum

► Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung sind Vektoren

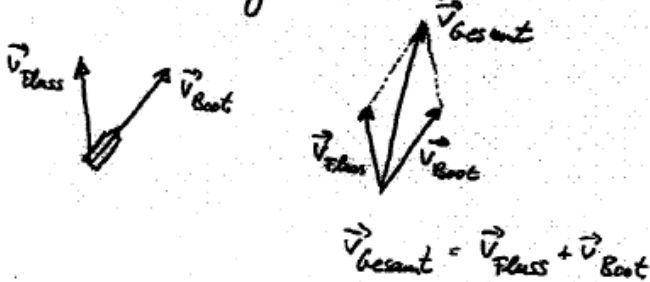
$\vec{r}(t), \vec{v}(t), \vec{a}(t)$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}}(t)$$

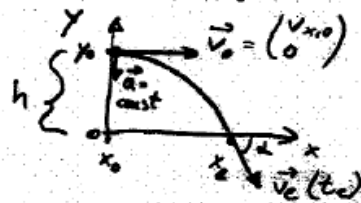
$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$

Superpositionsprinzip

Gleichzeitig verlaufende Bewegungen überlagern sich ungestört und addieren sich geometrisch



► Anwendungsbeispiel: waagrecht Wurf



$\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \vec{a} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$

Startwerte: $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}, \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{r}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot t^2 + v_{x,0} \cdot t + 0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 + 0 \cdot t + h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x,0} t \\ -\frac{1}{2} g t^2 + h \end{pmatrix}$
 $\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} x_e \\ 0 \end{pmatrix}$ Auftreffpunkt

$\Rightarrow v_{x,0} \cdot t_e \stackrel{!}{=} x_e$ und $-\frac{1}{2} g t_e^2 + h \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow t_e^2 = \frac{2h}{g} \rightarrow t_e = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ Flugzeit

$\rightarrow x_e = v_{x,0} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$ Wurfweite

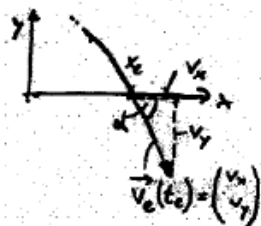
$\vec{v}_e(t_e) = \vec{a} \cdot t_e + \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot t_e + \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \vec{v}_e(t_e) = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ -\sqrt{2gh} \end{pmatrix}$ Auftreffgeschwindigkeit

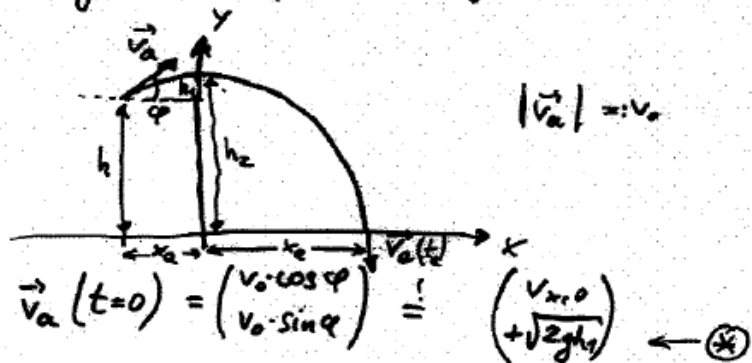
$\rightarrow |\vec{v}_e(t_e)| = \sqrt{v_{x,0}^2 + 2gh}$ Absolutbetrag der Auftreffgeschwindigkeit

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-\sqrt{2gh}}{v_{x,0}}$$

Auftreffwinkel α



► Zwei waagerechte Wurf \rightarrow schräger Wurf



$$|\vec{v}_a| = v_0$$

$$\vec{v}_a(t=0) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos \varphi \\ v_0 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ +\sqrt{2gh_1} \end{pmatrix} \leftarrow (*)$$

$$\vec{v}_e(t=t_e) = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ -\sqrt{2gh_2} \end{pmatrix}$$

$$x_a = v_{x,0} \cdot \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \quad ; \quad x_e = v_{x,0} \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$$

$$\rightarrow x_w = x_a + x_e = v_{x,0} \cdot \left(\sqrt{\frac{2h_1}{g}} + \sqrt{\frac{2h_2}{g}} \right)$$

$$\text{aus } (*) \rightarrow v_0 \cdot \sin \varphi = \sqrt{2gh_1} \rightarrow h_1 = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{2g}$$

$$h_2 = h + h_1 \rightarrow h_2 = h + \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{2g}$$

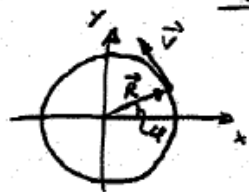
$$\rightarrow x_w = v_0 \cos \varphi \cdot \left(\frac{v_0 \sin \varphi}{g} + \sqrt{\frac{2gh}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g^2}} \right)$$

$$\frac{\text{Wurfweite}}{g} = \frac{v_0^2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{g} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \varphi}} \right)$$

$$\cos \varphi \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi$$

NB: Symmetrien in einer Bewegung können zu einer einfachen Lösung der Bewegungsgleichungen führen

Kreisbewegungen



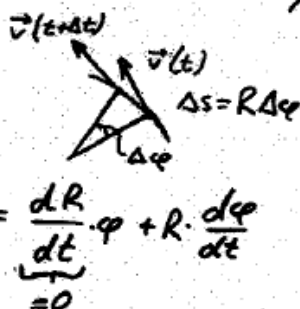
Winkel φ ; üblicherweise in radian (rad)
 $(360^\circ \cong 2\pi \text{ rad}, 1^\circ \cong 0.01745 \text{ rad})$

- Winkelgeschwindigkeit ω

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta(R\varphi)}{\Delta t} \rightarrow \frac{d(R\varphi)}{dt} = \underbrace{\frac{dR}{dt}}_{=0} \cdot \varphi + R \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\rightarrow v = R \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\boxed{\omega := \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R} = \dot{\varphi}}$$



- Umlauffrequenz: $f := \frac{\omega}{2\pi} \quad \left[\frac{1}{s}\right] \cong [Hz]$

- Umlaufzeit, Periode: $T := \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$

- Vektordarstellung der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

$$\vec{v} \perp \vec{\omega}, \vec{R}$$

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| |\vec{R}| \cdot \sin(\angle(\vec{\omega}, \vec{R}))$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{R^2} (\vec{R} \times \vec{v}) \quad \text{folgt aus } \vec{R} \times \vec{v} = \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

"bac-cab"-regel: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Skalarprodukt:
 $\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| |\vec{c}| \cos(\angle(\vec{a}, \vec{c}))$

$\vec{\omega} \perp \vec{v}, \vec{R}$, d.h. senkrecht auf Ebene der Kreisbewegung

Richtung von $\vec{\omega}$: Rechte-Hand-Regel



- Kreisbewegungen mit konstantem $\vec{\omega}$ sind gleichförmig beschleunigt



$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$$

$$\Delta \vec{v} \parallel \vec{R} \quad (\text{antiparallel})$$

$$\boxed{\vec{a}_z = -\omega^2 \vec{R} = -\frac{v^2}{R^2} \cdot \vec{R}} \quad \text{Zentripetal-} \\ \text{beschleunigung}$$

$$\vec{a}_{\text{cent}} \stackrel{!}{=} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{e}_\varphi)$$

$$= \underbrace{\frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_\varphi}_{=0} + v \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \vec{a}_z$$

\rightarrow Winkelbeschleunigung (hier = 0)

$$|\vec{e}_\varphi| = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = 1 \rightarrow 0 = \frac{d(\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi)}{dt} = 2 \vec{e}_\varphi \cdot \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \vec{e}_\varphi \perp \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$$

$$\text{und } \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \parallel \vec{e}_r \quad (\text{parallel})$$

\vec{e}_φ rotiert mit $\omega \rightarrow \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$ rotiert mit ω

$$\left(\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\omega \vec{e}_r \rightarrow \vec{a} = v \cdot \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = (\omega \cdot R) \cdot (-\omega \vec{e}_r) = -\omega^2 \cdot R \vec{e}_r = -\omega^2 \vec{R} \right)$$

3 Newtonsche Mechanik

Dynamik: untersucht Gründe einer Bewegungsänderung

- Ursachen: Kräfte
 - ▶ Kräfte sind Vektoren
 - ▶ Superpositionsprinzip für Kräfte (Vektoraddition)

3.1 Newtonsche Axiome

- 1. Newtonsches Axiom: Trägheitsprinzip

Maß für Bewegungszustand: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ Impuls

1. Newton. Axiom: $\vec{p} = \text{const}$

- 2. Newtonsches Axiom: Aktionsprinzip

$$\begin{array}{l} \vec{F} := \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} \\ \vec{F} = m \cdot \vec{a} \end{array} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \underbrace{m\dot{\vec{v}}}_{m \cdot \vec{a}} + \underbrace{\dot{m} \cdot \vec{v}}_{\text{Raketentrieb}}$$

$m = \text{const} \rightarrow$

- 3. Newtonsche Axiom: Reaktionsprinzip

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{actio = reactio.}$$

Kraft: $\vec{F} = m\vec{a}$

Einheit der Kraft: $1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} =: 1 \text{ N, Newton}$

3.2 Impulserhaltung

- Ein Abgeschlossenes System erfährt keine Kräfte von außen und übt keine Kräfte nach außen aus

$$\rightarrow \vec{F}_{\text{geschl. Sys}} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{p}_{\text{geschl. Sys}}}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{\vec{p}_{\text{geschl. Sys}} = \text{const.}}$$

Impulserhaltung

NB: Das abgeschlossene System kann aus N Körpern bestehen, die untereinander Kräfte $\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$ ausüben

$$\rightarrow 0 = \vec{F}_{\text{geschl. Sys}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$$

$$\rightarrow \vec{p}_{\text{geschl. Sys}} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{const.}$$

Impulserhaltungssatz

z.B.: $N=2 \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$

$$\rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d(\text{const})}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

3.2.1 Beispiel zur Impulserhaltung: Raketentrieb



$$\vec{P}_R + d\vec{P}_G = \text{const.} = m \cdot \vec{v}_R + dm_G \cdot \vec{v}_G$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{P}_R}{dt} + \frac{d\vec{P}_G}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}_R) + \frac{dm_G}{dt} \cdot \vec{v}_G$$

$$= (\dot{m} \vec{v}_R + m \dot{\vec{v}}_R) + \dot{m}_G \vec{v}_G$$

$$= \dot{m} \vec{v}_R + m \dot{\vec{v}}_R - \dot{m} \vec{v}_G$$

$$= m \dot{\vec{v}}_R + \dot{m}(\vec{v}_R - \vec{v}_G)$$

Ausströmgeschwindigkeit: $\vec{v}_r = \vec{v}_R - \vec{v}_G$ (relativ Geschwindigkeit)

$$\rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_R - \vec{v}_G = 0$$

$$\rightarrow \vec{F}_{\text{ges}} = 0 = m \dot{\vec{v}}_R + \dot{m} \vec{v}_r$$

► Füge Gravitationskraft auf Rakete hinzu:

$$\rightarrow \vec{F}_G = -m\vec{g} = m \dot{\vec{v}}_R + \dot{m} \vec{v}_r$$

in 1dim: $-mg = m \dot{v}_R + \dot{m} v_r$

$$-mg = m \frac{dv_R}{dt} + \frac{dm}{dt} v_r \quad | \cdot dt$$

Separation der Veränderlichen $\Rightarrow -mg dt = m dv_R + dm \cdot v_r \quad | \cdot \frac{1}{m}$

$$\rightarrow -g dt = dv_R + \frac{dm}{m} \cdot v_r$$

$$\rightarrow dv_R = -v_r \frac{dm}{m} - g dt$$

Integration
von $t=0$ bis
zur Brenndauer T

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v_R(T)} dv_R = - \int_{m_0}^{m(T)} v_r \frac{dm}{m} - \int_0^T g dt$$

$$\rightarrow v_R \Big|_{v_0}^{v_R(T)} = -v_r \left[\ln m \right]_{m_0}^{m(T)} - gT \Big|_0^T$$

$$\rightarrow v_R(T) - v_0 = -v_r \left[\ln m(T) - \ln m_0 \right] - gT$$

$$\rightarrow \boxed{v_R(T) = v_0 - v_r \ln \frac{m(T)}{m_0} - gT}$$

Raketengleichung

3.3 Beispiele für Kräfte

• Kräfte bei Kreisbewegungen

► Zentripetalkraft durch Zentripetalbeschleunigung

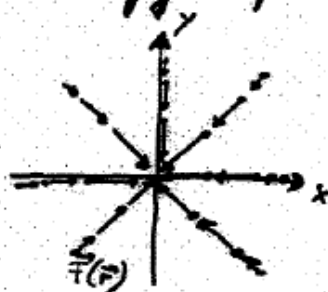
$$\vec{a}_Z = -\frac{v^2}{R^2} \cdot \vec{R} \rightarrow \boxed{\vec{F}_Z = m \vec{a}_Z = -m \frac{v^2}{R^2} \vec{R}}$$

Zentripetalkraft

NB: $\vec{F}_Z = \vec{F}_Z(\vec{R})$ ist ortsabhängige Kraft

→ Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$

z.B. $\vec{F}(\vec{r}) \sim \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$
mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



→ Zentralkraftfeld

NB: 3. Newton. Axiom: $\vec{F}_{\text{Zentripetal}} = -\vec{F}_{\text{Zentrifugal}}$
Zentrifugalkraft

► Beschleunigung / Verzögerung der Kreisbewegung



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \rightarrow \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{R})$$

$$= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{R}}$$

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \cdot (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{R}})$$

Betrachte: $\vec{R} \times \vec{F} = \vec{R} \times m \vec{a} = m \cdot \vec{R} \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{R}})$

$$= \dots = m R^2 \cdot \dot{\vec{\omega}}$$

$\vec{M} := \vec{R} \times \vec{F} = m R^2 \cdot \dot{\vec{\omega}}$ Drehmoment

$\vec{R} \times \vec{F} = \vec{M} \parallel \dot{\vec{\omega}}$
 $\vec{M} \perp \vec{R}, \vec{F}$

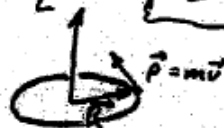
► Impuls der Kreisbewegung:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Betrachte: $\vec{R} \times \vec{p} = m \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = \dots = m R^2 \vec{\omega}$

$\vec{L} := \vec{R} \times \vec{p} = m R^2 \cdot \vec{\omega}$ Drehimpuls



□ NB: Drehimpulserhaltung in abgeschlossenen Systemen

□ NB: $\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{R} \times \vec{p}) = \underbrace{\dot{\vec{R}} \times \vec{p}}_{=0, da \vec{R} = \vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt}} + \vec{R} \times \underbrace{\dot{\vec{p}}}_{\vec{F}}$

→ $\dot{\vec{L}} = \vec{R} \times \vec{F} = \vec{M}$

□ NB: Zentralkräfte mit $\vec{F} \sim \vec{R}$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{R} \times \dot{\vec{p}} = \vec{R} \times \underbrace{\vec{F}}_{\vec{F} \parallel \vec{R}} \sim \vec{R} \times \vec{R} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\dot{\vec{L}} = 0}$$

ändern Drehimpuls nicht!

• Federkräfte:

Hookesches Gesetz: $\boxed{\vec{F}_r = -D\vec{x}}$

D: Richtgröße
Federkonstante
[N/m]

→ Anwendung als Kraftmesser

• Reibungskräfte:

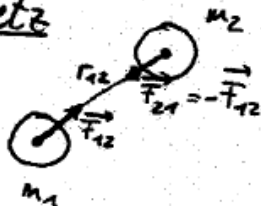
Haft-, Gleit-, Roll-, Luft-, ... -Reibung

• Gravitationskraft

► Newton'sches Gravitationsgesetz

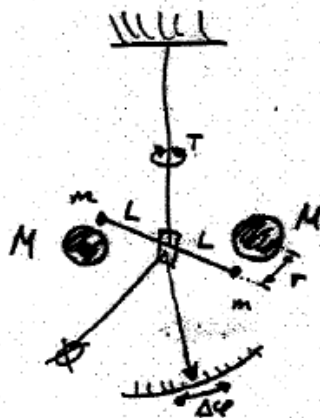
$$\boxed{F_G = G_N \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}}$$

(CODATA) $G_N = 6.6742 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$



Bestimmung der Gravitationskonst. G_N

Torsionspendel: (Cavendish, Eötvös)



$$F_G = G_N \cdot \frac{mM}{r^2}$$

Drehmoment M_D

$$\boxed{M_D = 2L \cdot F_G = D^* \cdot \Delta\varphi/2}$$

D^* : Windradsteifigkeit

$$D^* = \frac{4\pi^2 \cdot m \left(L^2 + \frac{2}{5} R_m^2 \right)}{T^2}$$

$$G_N = \frac{D^* \cdot \Delta\varphi/2 \cdot r^2}{2L \cdot mM} \approx \frac{\pi^2 L \cdot \Delta\varphi \cdot r^2}{T^2 \cdot M} \quad (R_m \ll L)$$

$L = 50 \text{ mm}$

$m = 38.3 \text{ g}$

$M = 1.5 \text{ kg}$

$R_m = 9.5 \text{ mm}$ (Radius der Kugeln m)

$T = 496 \text{ s}$ (Schwingungsdauer)

Messung: $\rightarrow \Delta\varphi = \frac{8.34 \text{ mm}}{400 \text{ mm}} \approx 0.0209 \text{ rad} \rightarrow G_N \approx 6.029 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{kg}}$

$r = 46.5 \text{ mm}$

$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \rightarrow \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2} = \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{kg}}$

- ▶ Erde: Gravitationskraft ist ortsabhängige Zentralkraft

$$\vec{F}_G = -G_N \frac{m \cdot M_E}{r^2} \vec{e}_r$$

NB: Kann Masse als in einem Punkt konzentriert betrachten
 → Punktmasse

3.3.1 Bewegungsgleichungen mit Kräften

- ortsunabhängige Kräfte: $\vec{F} \neq \vec{F}(\vec{r})$

2. Newtonsches Axiom $\rightarrow \vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \dot{\vec{v}}$

$$\rightarrow \vec{v}(t) = \frac{1}{m} \int \vec{F} dt + \vec{v}_0$$

$$\rightarrow \vec{p}(t) = \int \underbrace{\vec{F}}_{\text{Kraftstoß}} dt + \vec{p}_0 = \dots$$

- ortsabhängige Kräfte: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

z.B. Gravitationskraftfeld

▶ radiale Bewegung: $\vec{a}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_G(\vec{r})}{m} = -G_N \frac{M_E}{r^2} \vec{e}_r$

$$\rightarrow a(r) = -G_N \frac{M_E}{r^2}$$

z.B. Erdoberfläche: $r = R_E = 6378.140 \text{ km}$

$$a(r=R_E) = g = 9.80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\rightarrow \boxed{M_E \approx 5.977 \cdot 10^{24} \text{ kg}}$$

NB: Erdbeschleunigung für alle Körper gleich!

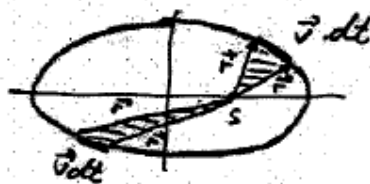
- ▶ geschlossene Bahnkurven
- Planetenbahnen: Kepler Gesetze

1. Planeten bewegen sich auf Ellipsen
Sonne in einem Brennpunkt der Ellipse



a: große Halbachse
b: kleine Halbachse
E: Exzentrizität
(E=0: Kreis)

2. Radiusvektor (Fahrstrahl) Sonne → Planet
überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen

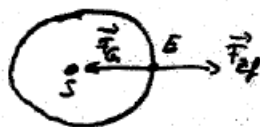


Dreiecksfläche: $dA = \frac{1}{2} |\vec{r}| \cdot |\vec{v} dt| \sin \alpha$
 $= \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt$

$$\rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times \vec{p}| = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{const}$$

$$\rightarrow \text{Drehimpulserhaltung } |\vec{L}| = \text{const}$$

3. Quadrate der Umlaufzeit T
 \leftrightarrow dritte Potenz der großen Halbachse



$$F_G = G_N \frac{M_E \cdot M_S}{r^2} \stackrel{!}{=} M_E \omega^2 \cdot r = F_{ZP}$$

$$\rightarrow \frac{G_N \cdot M_S}{r^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$\rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G_N M_S} = \text{const.}$$

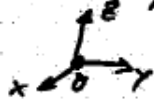
NB: $\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2 \cdot (M_S + m_1)}{T_2^2 \cdot (M_S + m_2)} \approx \frac{T_1^2}{T_2^2}$

für Planeten 1,2 mit Berücksichtigung der Sonnenmasse M_S

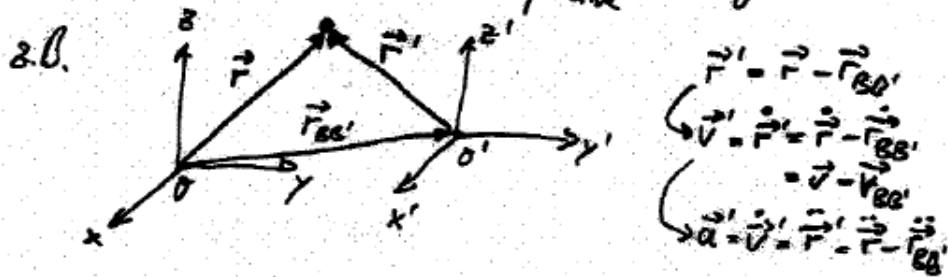
- ▶ offene Bahnkurven:
Hyperbelbahnen (, Parabelbahnen)

4 Beschleunigte Bezugssysteme

Bezugssystem: Koordinatensystem mit Ursprung O



Zwei Beobachter B, B' \leftrightarrow Zwei Bezugssysteme
Transformation



• gleichförmig bewegtes Bezugssystem B' :

$$\vec{r}_{OO'} = 0, \quad \vec{r}_{OO'} \neq 0$$

→ Relativgeschwindigkeit \vec{u} zwischen B und B' :

$$\vec{u} := \dot{\vec{r}}_{OO'}$$

→ Inertialsysteme

→ Galilei-Transformation zwischen Inertialsystemen

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u} \cdot t$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad \longrightarrow \quad \vec{F} = \vec{F}'$$

$$t = t' \quad \text{NB: Nurgültig, falls } |\vec{u}| \ll c$$

4.1 geradlinig beschleunigte Bezugssysteme

geradlinig beschleunigt: $\vec{u} = \vec{a}_{BB'} = \text{const} \neq 0$

$$\rightarrow \vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_{BB'} \rightarrow \vec{F} \neq \vec{F}'$$

$$\text{Sdlt} \rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}' + \vec{a}_{BB'} \cdot t + \underbrace{\vec{u}_0}_{\substack{\text{Relativgeschwindigkeit} \\ \text{zw. B und B' bei } t=0}}$$

$$\text{Sdlt} \rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \frac{1}{2} \vec{a}_{BB'} \cdot t^2 + \vec{u}_0 \cdot t + \underbrace{\vec{r}_0}_{\substack{\text{relativer Ort zw. B, B' bei} \\ t=0}}$$

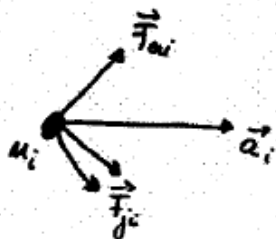
NB: B' ist kein Inertialsystem, da beschleunigt

Unterschied zwischen \vec{F} und \vec{F}'
sind Trägheitskräfte / Scheinkräfte

4.1.1 Prinzip von d'Alembert

• ruhender Beobachter

$$m_i \vec{a}_i = \underbrace{\vec{F}_{ei}}_{\text{äußere Kräfte}} + \underbrace{\sum_j \vec{F}_{ji}}_{\text{innere Kräfte}}$$

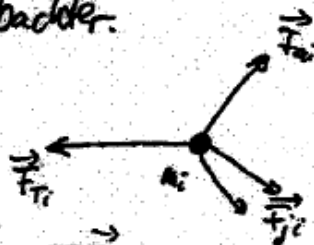


→ Bewegungsgleichung durch Dynamik
des Systems geben

► Prinzip von d'Alembert

dynamisches System m_i und \vec{a}_i $\xrightarrow{\text{Trägheitskräfte}}$ statisches System
 $\vec{F}_{Ti} = -m_i \vec{a}_i$

• mitbewegter Beobachter

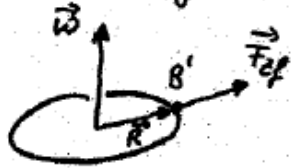


$$m_i \vec{a}_i = -\vec{F}_{Ti} = \vec{F}_{ei} + \sum_j \vec{F}_{ji}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{F}_{Ti} + \vec{F}_{ei} + \sum_j \vec{F}_{ji} = 0}$$

4.2 rotierende Bezugssysteme

- Zentrifugalkraft ist Trägheitskraft



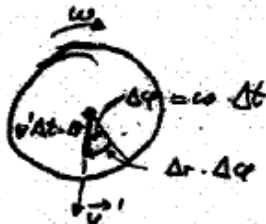
$$\vec{F}_{zf} = m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = m \omega^2 \vec{R}$$

keine äußeren Kräfte:

ruhender Beobachter B: $\vec{F}_{ges} = 0$ ($\vec{F}_{zf} = -\vec{F}_{zf} \rightarrow \vec{F}_{zf} + \vec{F}_{zf}$)

rotierender Beobachter B': $\vec{F}_{ges}' = 0 + m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = \vec{F}_{zf}$
weil B' mit $\vec{a}_{zp} = \frac{\vec{F}_{zf}}{m}$ beschleunigt

- Corioliskraft



- ▶ Massenpunkt bewegt sich mit \vec{v}' in der Zeit Δt

um $\Delta r = v' \cdot \Delta t$

- ▶ Beobachter B': rotiert in Δt um

$\Delta \varphi = \omega \cdot \Delta t$

Massenpunkt bleibt um

$\Delta r \cdot \Delta \varphi = (v' \cdot \Delta t) \cdot (\omega \cdot \Delta t) = v' \cdot \omega \cdot (\Delta t)^2$

→ für B' hat Massenpunkt eine Beschleunigung \vec{a}_c erfahren:

$$\frac{1}{2} a_c \cdot (\Delta t)^2 \stackrel{!}{=} \Delta r \cdot \Delta \varphi = v' \cdot \omega \cdot (\Delta t)^2$$

→ $a_c = 2 v' \cdot \omega$ Coriolis = beschleunigung
mit $\vec{a}_c \perp \vec{v}'$, $\vec{a}_c \perp \vec{\omega}$

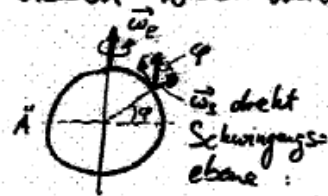
→ $\vec{a}_c = 2 \vec{v}' \times \vec{\omega}$
 $\vec{F}_c = 2 \cdot m \vec{v}' \times \vec{\omega}$ Coriolis = kraft

- Zentrifugal- und Corioliskraft sind Scheinkräfte bzw. Trägheitskräfte!

- Beispiel für rotierende Bezugssysteme

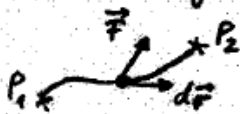
- ▶ Erdrotation

Nachgewiesen 1850 durch Foucaultsches Pendel



$\omega_S = \omega_E \cdot \sin \varphi$

5 Energie, Arbeit, Leistung



Arbeit

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz$$

Einheit der Arbeit: Joule, J, $1J \hat{=} 1Nm \hat{=} 1 \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$

NB: Wenn $\vec{F} \perp d\vec{r}$, dann $W=0!$

Beispiel: Kreisbewegung $\vec{F}_{Zp} \perp$ Kreislinie

Leistung

$$P := \frac{dW}{dt}$$

"Arbeit pro Zeit"

Einheit der Leistung: Watt, W, $1W \hat{=} 1 \frac{J}{s} \hat{=} 1 \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$

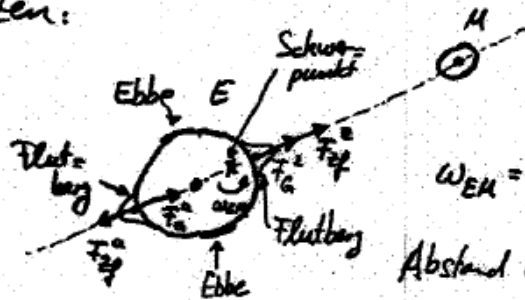
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d}{dt} \int \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$d\vec{r} = \vec{v} dt$

Leistung bei Drehbewegung

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{\omega} \cdot \vec{M}$$

Gesetzen:



$$\omega_{EM} = \frac{2\pi}{27.32d} = 2.66 \cdot 10^{-6} \frac{1}{s}$$

Abstand Erde-Mond:

$$r_{EM} = 380000 \text{ km}$$

$$R_E = 6378 \text{ km}$$

$$r_s = \frac{M_M}{M_E + M_M} \cdot r_{EM} \approx \frac{3}{4} R_E$$

$$M_M = \frac{1}{81} M_E$$

$$F_G^2 = G_M \frac{m \cdot M_M}{(r_{EM} - R_E)^2} \approx m \cdot 3.53 \cdot 10^{-5} \frac{N}{kg}$$

$$F_{Zf}^2 = m \cdot \omega_{EM}^2 \cdot (R_E - r_s) \approx m \cdot 1.22 \cdot 10^{-5} \frac{N}{kg}$$

$$F_G^a = G_M \frac{m \cdot M_M}{(r_{EM} + R_E)^2} \approx m \cdot 3.30 \cdot 10^{-5} \frac{N}{kg}$$

$$F_{Zf}^a = m \cdot \omega_{EM}^2 \cdot (R_E + r_s) \approx m \cdot 2.76 \cdot 10^{-5} \frac{N}{kg}$$

Mond zugewandte Seite:

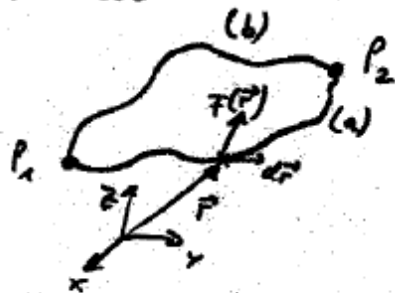
$$F_G^2 + F_{Zf}^2 \approx m \cdot 4.75 \cdot 10^{-5} \frac{N}{kg}$$

Mond abgewandte Seite

$$F_G^a - F_{Zf}^a \approx m \cdot 4.46 \cdot 10^{-5} \frac{N}{kg}$$

Tief- / Hochdruckgebieten

- Arbeit und konservative Kraftfelder



$$W = \int \vec{F} d\vec{r}$$

Betrachte geschlossene Weg: $P_1 \xrightarrow{(a)} P_2 \xrightarrow{(b)} P_1$

$$W_a + W_b = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r}_a + \int_{P_2}^{P_1} \vec{F} d\vec{r}_b = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r}_a - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r}_b$$

$$\Rightarrow W_a + W_b = \oint \vec{F} d\vec{r} \stackrel{!}{=} 0$$

für konservative Kraftfelder

- ▶ Beispiel für konservative Kraftfelder

Zentralkraftfelder $\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$

- ▶ Gegenteil: dissipative Kraftfelder