SEKTION PHYSIK DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Prof. V. Mukhanov · **Quantenmechanik II (T V)** · WS 2004/05

Aufgabe 1 (FORMALISMUS) (6 PKT.)

1.1 Bestimmen Sie die Operatoren $\hat{X}, \hat{Y}$ in folgender Entwicklung (3 PKT.)

$$(\mathbb{1} + \hat{A} + \lambda\hat{B})^{-1} = \hat{X} + \lambda\hat{Y} + O(\lambda^2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

1.2 Gegeben sei der Hamilton–Operator $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + \hat{V}(\hat{x})$ mit $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$. Zeigen Sie, daß

$$\langle n|\hat{x}|n'\rangle = -i\frac{\hbar}{m}\frac{\langle n|\hat{p}|n'\rangle}{E_n - E_{n'}}\,. \quad \text{(3 PKT.)}$$

Hinweis: Betrachten Sie den Kommutator $[\hat{x}, \hat{H}]$.

Aufgabe 2 (TRANSLATIONSOPERATOR) (10 PKT.)

Der Translationsoperators $\hat{T}(a)$ wird definiert durch seine Wirkung auf einen Eigenzustand $|x\rangle$ des Ortsoperators ist definiert durch $\hat{T}(a)|x\rangle := |x + a\rangle$, $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

2.1 $\hat{T}(a)\hat{T}(b) = \hat{T}(a + b)$. (1 PKT.)

2.2 $\hat{T}(a)$ ist unitär. (2 PKT.)

2.3 $\hat{T}(a)$ ist von der Form $\hat{T}(a) = \exp(ia\hat{G})$ mit einem (zunächst unbestimmten) hermiteschen Operator $\hat{G}$. (2 PKT.)

2.4 $\hat{T}^\dagger(a)\,\hat{x}\,\hat{T}(a) = \hat{x} + a$. (2 PKT.)

2.5 Werten Sie 2.4 für infinitesimale Verschiebung a aus, und drücken Sie dann den Operator $\hat{G}$ durch $\hat{x}, \hat{p}$ aus. (3 PKT.)

Aufgabe 3 (DICHTEMATRIX) (10 PKT.)

3.1 Charakterisieren Sie einen reinen Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle + |b\rangle)$ durch seine Dichtematrix, wobei $|a\rangle, |b\rangle$ zwei normierte, orthogonale Vektoren sind. (1 PKT.)

3.2 Ein unpolarisierter Strahl von geladenen Teilchen bestehe je zur Hälfte aus Teilchen mit 'spin–up' bzw. 'spin–down', charakterisiert durch die Zustandsvektoren $\binom{1}{0}$ bzw. $\binom{0}{1}$. Berechnen Sie die Dichtematrix $\hat{\rho}$ des Systems. (2 PKT.)

3.3 Berechnen Sie $\mathrm{tr}(\hat{\rho})$ und $\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2)$ für den Teilchenstrahl aus 3.2. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis. (2 PKT.)

3.4 Nun werde ein homogenes Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ eingeschaltet. Der Hamilton–Operator des Systems lautet somit $\hat{H} = -\mu B\sigma_3$ mit $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie Zustandssumme $Z(\beta)$ und mittlere Energie $E(\beta)$ des Systems bei Temperatur $kT = 1/\beta$. (5 PKT.)

SEKTION PHYSIK DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Prof. V. Mukhanov · Quantenmechanik II (T V) · WS 2004/05

Aufgabe 7 (ZWEI–NIVEAU–SYSTEM) (8 PKT.)

Gegeben sei der Hamilton–Operator $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ mit

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda v \\ \lambda v & 0 \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

7.1 Bestimmen Sie die Energie–Eigenwerte $E_{I,II}$ von $\hat{H}$ durch exakte Matrix–Diagonalisierung. (4 PKT.)

7.2 Entwickeln Sie das Ergebnis aus 7.1 nach Potenzen von λ. Vergleichen Sie mit der Energieverschiebung ΔE_n in zweiter Ordnung Störungstheorie,

$$\Delta E_n = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle n|\hat{V}|m\rangle|^2}{E_n - E_m}, \quad \text{wobei} \quad \hat{H}_0|n\rangle = E_n|n\rangle . \qquad (4 \text{ PKT.})$$

Aufgabe 8 (HARMONISCHER OSZILLATOR MIT LINEARER STÖRUNG) (10 PKT.)

Gegeben sei der Hamilton–Operator $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega^2\hat{q}^2/2 + \alpha\hat{q}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

8.1 Welches physikalische System besitzt einen derartigen Hamilton–Operator? (1 PKT.)

8.2 Bestimmen Sie die exakten Energie–Eigenwerte von $\hat{H}$. (3 PKT.)
Hinweis: Quadratische Ergänzung!

8.3 Stellen Sie den Propagator $K_\alpha(q_f, t_f; q_i, t_i)$ des Systems durch ein Pfadintegral im Konfigurationsraum dar. (2 PKT.)

8.4 Zeigen Sie mit Hilfe des Pfadintegrals:

$$K_\alpha = K_0 \exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\alpha^2}{2m\omega^2}T\right), \quad T = t_f - t_i .$$

Dabei ist K_0 der ungestörte Propagator ($\alpha = 0$). (4 PKT.)