Zentralübung

Thermodynamik und Statistische Physik (T4)

Lösungsskizze Blatt 13

WiSe 2019/20

Aufgabe 1: Bosegas im Magnetfeld II

a) Wir rechnen die Funktion $n(z)$ aus

$$n(z)|_{B=0} = \left.\frac{N_+ + N_0 + N_-}{V}\right|_{B=0} = \frac{3}{\lambda^3} g_{3/2}(z) = \frac{3}{\lambda^3}\big(z + \frac{z^2}{2^{3/2}} + \dots\big).$$

Wir invertieren die Reihe und finden

$$z(n) = \big(\tfrac{n\lambda^3}{3}\big) - \tfrac{1}{2^{3/2}}\big(\tfrac{n\lambda^3}{3}\big)^2 + \dots .$$

Einsetzen in der Suszeptibilität liefert

$$\begin{aligned}\chi\big(T, \mu(n)\big) &= \frac{2\mu_0^2 V}{kT\lambda^3}\big(z(n) + \tfrac{z(n)^2}{2^{1/2}} + \dots\big) \\ &= \frac{2\mu_0^2 V}{kT\lambda^3}\Big(\big(\tfrac{n\lambda^3}{3}\big) + (-2^{-3/2} + 2^{-1/2})\big(\tfrac{n\lambda^3}{3}\big)^2 + \dots\Big) \\ &= \frac{2\mu_0^2 N}{3kT}\big(1 + \tfrac{1}{2^{3/2}}\big(\tfrac{n\lambda^3}{3}\big) + \dots\big)\end{aligned}$$

b) Wenn $B = 0$, Bose-Einstein Kondesation passiert bei $z = 1$ und dann ist

$$n = n(1) = \frac{3}{\lambda_c^3} g_{3/2}(1) = \frac{3(2\pi mkT_c)^{3/2}}{h^3}\zeta(3/2).$$

Wir können nach T_c lösen:

$$T_c(n) = \frac{h^2}{2\pi mk}\left(\frac{n}{3\zeta(3/2)}\right)^{2/3}.$$

Wenn $T \to T_c$, $z \to 1$ die Suszeptibilität divergiert

$$\chi(T \to T_c, z \to 1) \sim g_{1/2}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty.$$

c) Wenn Kondensation eintritt, gilt für den Grundzustand (oder, bei Entartung, die Grundzustände) $E - \mu = 0$, was man auch an der Formel für die Besetzungszahl sehen kann $n_s(\vec{k}, B) = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta E_s(\vec{k},B)} - 1}$ (die dann divergiert). Der Grundzustand ist also gegeben durch $\vec{k} = 0, s = +1$ für $B > 0$. Damit finden wir $ze^{\beta\mu_0 B} = 1 \implies \mu = -\mu_0 B = E_{\text{min.}}$.

Aufgabe 2: Dirac Teilchen

a) Die Wahrscheinlichkeit für die Besetzung eines Zustandes mit Energie E ist laut Fermi-Statistik

$$P\big(n(E)\big) = \frac{e^{\beta(\mu-E)n}}{1+e^{\beta(\mu-E)}}.$$

Also, gilt

$$P\big(n(\mu+\delta)=1\big) = \frac{e^{-\beta\delta}}{1+e^{-\beta\delta}} = \frac{1}{1+e^{\beta\delta}} = P\big(n(\mu-\delta)=0\big)$$

für jedes δ.

b) Bei $T=0$ sind alle Zustände mit $E>0$ lehr, während alle Zustände mit $E<0$ besetzt. In anderen Worten, ist $\mu(T=0) =: E_F = 0$.

Das Ergebnis aus a) zeigt u.a. dass, für $\mu=0$ gilt $\langle n(E)\rangle + \langle n(-E)\rangle = 1$. Also jedes Teilchen, das einen Zustand negativer Energie verlässt, besetzt dann einen Zustand positiver Energie. Damit ist die Teilchenzahl konstant bei jeder Temperatur, und daher gilt auch $\mu(T)=\mu(0)=0$.

c) Wie schon bei b) erwähnt wurde, sind bei $T=0$ alle Teilchen bei Zustände mit $E<0$ "gefroren". Also ist dann (mit $\mu(T)=0$) und

$$\begin{aligned}
E(T)-E(0) &= \sum_{\vec{k},s_z}\Big[\mathcal{E}_+(\vec{k})n_+(\vec{k}) + \mathcal{E}_-(\vec{k})n_-(\vec{k}) - \mathcal{E}_-(\vec{k})\Big] \\
&= 2\sum_{\vec{k}}\Big[\mathcal{E}_+(\vec{k})n_+(\vec{k}) + \underbrace{\big(-\mathcal{E}_-(\vec{k})\big)}_{=\mathcal{E}_+(\vec{k})}\underbrace{\big(1-n_-(\vec{k})\big)}_{=n_+(\vec{k})}\Big] \\
&= 4\sum_{\vec{k}}\mathcal{E}_+(\vec{k})n_+(\vec{k}) \\
&= \frac{4V}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3k\,\frac{\mathcal{E}_+(\vec{k})}{e^{\beta\mathcal{E}_+(\vec{k})}+1}.
\end{aligned}$$

d) Für masselose Teilchen gilt $\mathcal{E}_+(\vec{k}) = \hbar c|\vec{k}|$ und wir rechnen durch $x=\beta\hbar ck$

$$\begin{aligned}
E(T)-E(0) &= \frac{4V\cdot 4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \mathrm{d}k\; k^2\frac{\hbar ck}{e^{\beta\hbar ck}+1} \\
&= \frac{2V}{\pi^2}kT\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3\int_0^\infty \mathrm{d}x\;\frac{x^3}{e^x+1} \\
&= \frac{2V}{\pi^2}kT\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3\Gamma(4)f_4(1) \\
&= \frac{7\pi^2}{60}VkT\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Relativistisches Bosonengas in d Dimensionen

a) Wir wissen, dass

$$Z_{\mathrm{GK}} = \prod_{\vec{p}}\frac{1}{1-e^{\beta(\mu-\epsilon(\vec{p}))}}$$

und dann ist

$$G = -kT\log Z_{\mathrm{GK}} = kT\sum_{\vec{p}}\log\big(1-e^{\beta(\mu-\epsilon(\vec{p}))}\big).$$

Im Kontinuumslimes in d Dimensionen ersetzen wir die Summe $\sum_{\vec{p}}$ mit eine d-dimensionale Integration $\frac{V}{(2\pi\hbar)^d}\int \mathrm{d}^dp$. Wir rechnen mit $x=\beta c\hbar k$

$$G = kT\frac{V}{(2\pi\hbar)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{d}^dp\;\log\big(1-e^{\beta(\mu-\epsilon(\vec{p}))}\big)$$

$$
\begin{aligned}
&= kT\frac{V\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d}\int_0^\infty \mathrm{d}k\; k^{d-1}\log\left(1-e^{\beta(\mu-c\hbar k)}\right)\\
&= kT\frac{V\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d}\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^d\int_0^\infty \mathrm{d}x\; x^{d-1}\log\left(1-ze^{-x}\right)\\
&\overset{\text{P.I.}}{=} -VkT\Omega_{d-1}\left(\frac{kT}{hc}\right)^d\frac{1}{d}\int_0^\infty \mathrm{d}x\;\frac{x^d}{e^x z^{-1}-1}\\
&= -VkT\Omega_{d-1}\left(\frac{kT}{hc}\right)^d\frac{\Gamma(d+1)}{d}g_{d+1}(z)\\
&= -VkT\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\left(\frac{kT}{hc}\right)^d\frac{\Gamma(d+1)}{d}g_{d+1}(z)\\
&= -VkT\left(\frac{kT}{hc}\right)^d\pi^{d/2}\frac{d!}{(d/2)!}g_{d+1}(z)
\end{aligned}
$$

Für die Dichte haben wir durch $z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}g_{\nu+1}(z) = g_\nu(z)$

$$
n = \frac{N}{V} = -\frac{1}{V}\frac{\partial G}{\partial\mu} = -\frac{1}{V}\beta z\frac{\partial G}{\partial z} = \left(\frac{kT}{hc}\right)^d\pi^{d/2}\frac{d!}{(d/2)!}g_d(z).
$$

b) Es gilt, dass $pV = -G$, also

$$
p = -\frac{G}{V} \quad \left(= kT\left(\frac{kT}{hc}\right)^d\pi^{d/2}\frac{d!}{(d/2)!}g_{d+1}(z)\right).
$$

Zusätzlich aus dem ersten Ergebnis aus a) gilt $\log Z_{\mathrm{GK}}(\beta, z) = c\cdot\beta^{-d}g_{d+1}(z)$, wo c konstant (in β, z) und dann ist

$$
E = -\left(\frac{\partial\log Z_{\mathrm{GK}}}{\partial\beta}\right)_z = c\cdot d\beta^{-(d+1)}g_{d+1}(z) = \frac{d}{\beta}\log Z_{\mathrm{GK}} = -d\cdot G.
$$

Wir finden

$$
\frac{E}{pV} = d = \left(\frac{E}{pV}\right)_{\text{Clas.}}.
$$

c) Die Bose-Einstein Kondesation findet statt wenn $z = 1$ und die Temperatur als Funktion von n wird durch $n = n(z = 1)$ definiert. Also ist

$$
n = n(z=1) = \left(\frac{kT_c}{hc}\right)^d\pi^{d/2}\frac{d!}{(d/2)!}\zeta(d)
$$

$$
T_c(n) = \frac{hc}{k}\left(\frac{(d/2)!n}{d!\pi^{d/2}\zeta(d)}\right)^{\frac{1}{d}}.
$$

Da die Zeta-Funktion nur für $d > 1$ endlich ist, gibt es eine Kondesation für $d > 1$.

d) Wir haben in b) gefunden, dass $E = -d\cdot G \sim T^{d+1}$. Wenn $T < T_c$ ist $z = 1$ also haben wir dann

$$
c(T) = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{z=1} = (d+1)\frac{E}{T} = -d(d+1)\frac{G}{T} = d(d+1)Vk\left(\frac{kT}{hc}\right)^d\pi^{d/2}\frac{d!}{(d/2)!}\zeta(d+1)
$$

e) Wir nehmen den Limes $T \to T_c \Leftrightarrow z \to 1$ im Ergebnis aus a)

$$
N(z=1) = V\left(\frac{kT_c}{hc}\right)^d\pi^{d/2}\frac{d!}{(d/2)!}\zeta(d)
$$

und zusammen mit dem Ergebnis aus d) ist

$$
\frac{c(T_c)}{kN} = \frac{d(d+1)\zeta(d+1)}{\zeta(d)},
$$

was von dem klasischen Wert abweicht.

Bei Fragen E-Mail an *tabler.alexander@physik.uni-muenchen.de*