Zentralübung

Thermodynamik und Statistische Physik (T4)

Lösungsskizze Blatt 12

WiSe 2019/20

Aufgabe 1: Quantenkorrekturen

a) Wir berechnen mit $\ln Z_G = \frac{pV}{kT} = \sum_i \ln Z_i^{\text{Bos.}}$ im Kontinuumslimes mit $\beta\frac{p^2}{2m} = x \implies p^2 \mathrm{d}p = \frac{1}{2}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\sqrt{x}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\frac{p}{kT} &= -\frac{1}{V}(2s+1)\frac{V}{h^3}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3p\ \ln\left(1-e^{-\beta(\frac{p^2}{2m}-\mu)}\right)\\
&= -(2s+1)\frac{4\pi}{h^3}\int_0^\infty \mathrm{d}p\ p^2 \ln\left(1-e^{-\beta(\frac{p^2}{2m}-\mu)}\right)\\
&= -(2s+1)\frac{2\pi}{h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\int_0^\infty \mathrm{d}x\ \sqrt{x}\ln\left(1-e^{-x}z\right)\\
&= -(2s+1)\frac{2\pi}{\pi^{3/2}}\frac{1}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\frac{2}{3}\int_0^\infty \mathrm{d}x\ (x^{3/2})'\ln\left(1-e^{-x}z\right)\\
&\overset{\text{P.I.}}{=} +(2s+1)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\lambda^3}\frac{2}{3}\int_0^\infty \mathrm{d}x\ \frac{x^{3/2}e^{-x}z}{1-e^{-x}z}\\
&= (2s+1)\frac{1}{\lambda^3}\frac{1}{\Gamma(5/2)}\int_0^\infty \mathrm{d}x\ \frac{x^{3/2}}{e^x z^{-1}-1}\\
&= (2s+1)\frac{1}{\lambda^3}g_{5/2}(z).
\end{aligned}$$

Analog berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v} = \frac{N}{V} &= (2s+1)\frac{1}{h^3}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3p\ (e^{\beta\frac{p^2}{2m}}z^{-1}-1)^{-1}\\
&= (2s+1)\frac{4\pi}{h^3}\int_0^\infty \mathrm{d}p\ p^2\ (e^{\beta\frac{p^2}{2m}}z^{-1}-1)^{-1}\\
&= (2s+1)\frac{2\pi}{\pi^{3/2}h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}\int_0^\infty \mathrm{d}x\ \frac{\sqrt{x}}{e^x z^{-1}-1}\\
&= (2s+1)\frac{1}{\lambda^3}\frac{1}{\Gamma(3/2)}\int_0^\infty \mathrm{d}x\ \frac{\sqrt{x}}{e^x z^{-1}-1}\\
&= (2s+1)\frac{1}{\lambda^3}g_{3/2}(z)
\end{aligned}$$

b) Laut Hinweis, lösen wir durch die zweite Gleichung aus a)

$$u := \frac{\lambda^3}{v} = (2s+1)g_{3/2}(z) = (2s+1)\left(z+\tfrac{z^2}{2^{3/2}}+\mathcal{O}(z^3)\right)$$

und wir invertieren die Reihe $z(u) = \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \mathcal{O}(u^3)$:

$$u = (2s+1)\left(\alpha_1 u + (\alpha_2 + \tfrac{\alpha_1^2}{2^{3/2}})u^2 + \mathcal{O}(u^3)\right) \implies z(u) = \frac{1}{2s+1}u - \frac{1}{(2s+1)^2 2^{3/2}}u^2 + \mathcal{O}(u^3).$$

Wir setzen das obige Resultat in der ersten Gleichung aus a):

$$\begin{aligned}
\frac{pv}{kT} &= (2s+1)\frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(z) \\
&= (2s+1)u^{-1}\big(z(u) + \frac{z^2(u)}{2^{5/2}} + \mathcal{O}(u^3)\big) \\
&= u^{-1}\big(u - \frac{1}{(2s+1)2^{3/2}}u^2 + \frac{1}{(2s+1)2^{5/2}}u^2 + \mathcal{O}(u^3)\big) \\
&= 1 - \frac{1}{(2s+1)2^{5/2}}\frac{\lambda^3}{v} + \mathcal{O}(\frac{\lambda^3}{v})
\end{aligned}$$

c) Unser Ergebnis aus b) ist

$$p = kT\big(\frac{1}{v} - \frac{\alpha}{v^2}\big),$$

mit $\alpha = \frac{1}{(2s+1)2^{5/2}}\lambda^3$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\kappa &= -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,N} = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{T,N} \\
&= -\frac{1}{v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{T,N}} = \frac{1}{v\cdot kT\big(\frac{1}{v^2} + \frac{2\alpha}{v^3}\big)} \\
&= \frac{V}{NkT}\frac{1}{1+\frac{2\alpha}{v}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Bosegas im Magnetfeld

a) Es gibt keine Wechselwirkung, und das Energie-Spektrum ist gegeben durch $\epsilon_s(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu_0 B s$, wo $p^2 = \hbar^2 k^2$. Also ist

$$Z_{\mathrm{GK}} = \prod_{s,\vec{k}} Z_{s,\vec{k}}, \qquad Z_{s,\vec{k}} = \sum_{n_s=0} e^{\beta(\mu-\epsilon_s)n_s} = \frac{1}{1-e^{\beta(\mu-\epsilon_s(\vec{k}))}}$$

b) Die Besetzungszahlen $\langle n_s(\vec{k})\rangle$ sind gegeben durch

$$\langle n_s(\vec{k})\rangle = \frac{\partial}{\partial(\beta\mu)}\ln Z_{s,\vec{k}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_s(\vec{k})-\mu)}-1}.$$

c) Im Kontinuumslimes mit $k = \sqrt{x}\frac{\sqrt{2mkT}}{h} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\lambda}\sqrt{x}$ haben wir

$$\begin{aligned}
N_s = \sum_{\vec{k}}\langle n_s(\vec{k})\rangle &= \frac{V}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3k\, \frac{1}{e^{\beta(\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\mu_0Bs-\mu)}-1} \\
&= \frac{V}{2\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}k\, k^2 \frac{1}{e^{\beta(\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\mu_0Bs-\mu)}-1} \\
&= \frac{V}{2\pi^2}\frac{4\pi^{3/2}}{\lambda^3}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{\sqrt{x}}{e^x z^{-1}e^{-\beta\mu_0Bs}-1} \\
&= \frac{V}{\lambda^3}\frac{1}{\Gamma(3/2)}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{\sqrt{x}}{e^x z^{-1}e^{-\beta\mu_0Bs}-1} \\
&= \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}\big(ze^{\beta\mu_0Bs}\big).
\end{aligned}$$

d) Wir ersetzen aus c):

$$M(T,\mu) = \mu_0(N_+ - N_-) = \frac{\mu_0 V}{\lambda^3}\big(g_{3/2}(ze^{\beta\mu_0B}) - g_{3/2}(ze^{-\beta\mu_0B})\big)$$

Für kleine B's haben wir $e^{\alpha B} = 1 + \alpha B + \mathcal{O}(B^2)$. Durch die die Taylor-Entwicklung $g_\nu(x + x_0) = g_\nu(x_0) + x \cdot g'_\nu(x_0) + \mathcal{O}(x^2)$ und die Identität $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g_\nu(x) = g_{\nu-1}(x)$ finden wir

$$\begin{aligned}
M(T,\mu) &= \frac{\mu_0 V}{\lambda^3}\Big(g_{3/2}\big(z(1+\beta\mu_0 B)\big) - g_{3/2}\big(z(1-\beta\mu_0 B)\big) + \mathcal{O}(B^2)\Big) \\
&= \frac{\mu_0 V}{\lambda^3}\Big(g_{3/2}(z) + z\cdot\beta\mu_0 B\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g_{3/2}(z) - g_{3/2}(z) + z\cdot\beta\mu_0 B\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g_{3/2}(z) + \mathcal{O}(B^2)\Big) \\
&= \frac{2\mu_0^2 V B}{kT\lambda^3} g_{1/2}(z) + \mathcal{O}(B^2),
\end{aligned}$$

und die Suszeptibilität ist

$$\chi(T,\mu) = \frac{2\mu_0^2 V}{kT\lambda^3} g_{1/2}(z) + \mathcal{O}(B).$$

Aufgabe 3: Nicht-wechselwirkende Bosonen

a) Da[1]

$$\sum_{\{n_{\vec p}\}} \prod_{\vec p} f(\vec p, n_{\vec p}) = \prod_{\vec p} \sum_{n_{\vec p}} f(\vec p, n_{\vec p})$$

gilt

$$P(\{n_{\vec q}\}) = \frac{\prod_{\vec q} e^{\beta(\mu-\mathcal{E}_{\vec q})n_{\vec q}}}{\sum_{\{m_{\vec q}\}}\prod_{\vec q} e^{\beta(\mu-\mathcal{E}_{\vec q})m_{\vec q}}} = \frac{\prod_{\vec q} e^{\beta(\mu-\mathcal{E}_{\vec q})n_{\vec q}}}{\prod_{\vec q}\sum_{m_{\vec q}=0}^\infty e^{\beta(\mu-\mathcal{E}_{\vec q})m_{\vec q}}} = \frac{\prod_{\vec q} e^{\beta(\mu-\mathcal{E}_{\vec q})n_{\vec q}}}{\prod_{\vec q}\frac{1}{1-e^{\beta(\mu-\mathcal{E}_{\vec q})}}} = \prod_{\vec q}(1-z_{\vec q}) z_{\vec q}^{n_{\vec q}}.$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle \exp[ikn_{\vec q}]\rangle &= \sum_{\{n_{\vec p}\}} P(\{n_{\vec p}\}) e^{ikn_{\vec q}} \\
&= \sum_{\{n_{\vec p}\}}\prod_{\vec p}(1-z_{\vec p}) z_{\vec p}^{n_{\vec p}} e^{ikn_{\vec q}} \\
&= \underbrace{\prod_{\vec p\neq\vec q}\left(\sum_{n_{\vec p}=0}^\infty (1-z_{\vec p}) z_{\vec p}^{n_{\vec p}}\right)}_{=1} \cdot \sum_{n_{\vec q}=0}^\infty (1-z_{\vec q}) z_{\vec p}^{n_{\vec q}} e^{ikn_{\vec q}} \\
&= \frac{1-z_{\vec q}}{1-z_{\vec q}e^{ik}}.
\end{aligned}$$

c) Aus dem Blatt 6 folgt, dass die Kumulanten $\kappa_1(X) = \mu_1(X) = \langle X\rangle$ und $\kappa_2(X) = \mu_2(X) - \mu_1^2(X) = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2$ gegeben sind durch:

$$\log\langle e^{ikX}\rangle = ik\langle X\rangle + \frac{(ik)^2}{2}(\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2) + \mathcal{O}(k^3).$$

Wir berechnen mit $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(k^3)$

$$\begin{aligned}
\log\langle\exp[ikn_{\vec q}]\rangle &= \log(1-z_{\vec q}) - \log(1-z_{\vec q}e^{ik}) \\
&= \log(1-z_{\vec q}) - \log\big(1 - z_{\vec q}(1 + ik + \tfrac{(ik)^2}{2} + \mathcal{O}(k^3)\big) \\
&= -\log\big(1 - ik\tfrac{z_{\vec q}}{1-z_{\vec q}} - \tfrac{(ik)^2}{2}\tfrac{z_{\vec q}}{1-z_{\vec q}} + \mathcal{O}(k^3)\big) \\
&= ik\tfrac{z_{\vec q}}{1-z_{\vec q}} + \tfrac{(ik)^2}{2}\tfrac{z_{\vec q}}{1-z_{\vec q}} + \tfrac{1}{2}\big(ik\tfrac{z_{\vec q}}{1-z_{\vec q}}\big)^2 + \mathcal{O}(k^3) \\
&= ik\tfrac{z_{\vec q}}{1-z_{\vec q}} + \tfrac{(ik)^2}{2}\tfrac{z_{\vec q}}{(1-z_{\vec q})^2} + \mathcal{O}(k^3)
\end{aligned}$$

und wir finden

$$\langle n_{\vec q}\rangle = \tfrac{z_{\vec q}}{1-z_{\vec q}}, \qquad \langle n_{\vec q}^2\rangle - \langle n_{\vec q}\rangle^2 = \tfrac{z_{\vec q}}{(1-z_{\vec q})^2}.$$

[1] Siehe z.B. Lösung Blatt 6.

d) Wir lösen die erste Gleichung aus c):

$$z_{\vec{q}} = \frac{\langle n_{\vec{q}} \rangle}{1+\langle n_{\vec{q}} \rangle}.$$

Ersetzen in der zweiten Gleichung aus c) liefert:

$$\langle n_{\vec{q}}^2 \rangle - \langle n_{\vec{q}} \rangle^2 = \frac{\frac{\langle n_{\vec{q}} \rangle}{1+\langle n_{\vec{q}} \rangle}}{\left(1 - \frac{\langle n_{\vec{q}} \rangle}{1+\langle n_{\vec{q}} \rangle}\right)^2} = \langle n_{\vec{q}} \rangle \left(1 + \langle n_{\vec{q}} \rangle\right)$$

e) Wir rechnen:

$$P(\{n_{\vec{q}}\}) = \prod_{\vec{q}} (1 - z_{\vec{q}}) z_{\vec{q}}^{n_{\vec{q}}} = \prod_{\vec{q}} \left(1 - \frac{\langle n_{\vec{q}} \rangle}{1+\langle n_{\vec{q}} \rangle}\right)\left(\frac{\langle n_{\vec{q}} \rangle}{1+\langle n_{\vec{q}} \rangle}\right)^{n_{\vec{q}}} = \prod_{\vec{q}} \left(\langle n_{\vec{q}} \rangle\right)^{n_{\vec{q}}} \left(1 + \langle n_{\vec{q}} \rangle\right)^{-1-n_{\vec{q}}}.$$

f) Die Entropie ist gegeben durch $S = -k \langle \ln P \rangle$ und wir rechnen mit Linearietät von $\langle \cdot \rangle$:

$$\begin{aligned} S &= -k \langle \ln P \rangle \\ &= -k \left\langle \sum_{\vec{q}} \left[n_{\vec{q}} \ln \left(\langle n_{\vec{q}} \rangle\right) - (1 + n_{\vec{q}}) \ln \left(1 + \langle n_{\vec{q}} \rangle\right)\right] \right\rangle \\ &= -k \sum_{\vec{q}} \left[\langle n_{\vec{q}} \rangle \ln \left(\langle n_{\vec{q}} \rangle\right) - (1 + \langle n_{\vec{q}} \rangle) \ln \left(1 + \langle n_{\vec{q}} \rangle\right)\right]. \end{aligned}$$