Zentralübung

Thermodynamik und Statistische Physik (T4)

Lösungsskizze Blatt 5

WiSe 2019/20

Aufgabe 1: Gamma- und Zeta-Funktion

a) $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\mathrm{d}x = -\int_0^\infty x^n (e^{-x})'\mathrm{d}x = 0 + n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x = n\Gamma(n)$.

b) Mit ist $u = \sqrt{x}$ ist $\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}u$ und $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$ wo im letzten Schritt das Gauss Integral benutzt wurde: $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

c) Für $n = 1$ ist $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x}|_0^\infty = 1$ und aus a) ergibt sich dann $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1\Gamma(1) = (n-1)!$.

d) $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \exp(n\ln x - x)\mathrm{d}x$ und wir setzen $x = n\cdot y$ und somit ist $\Gamma(n+1) = n\int_0^\infty \exp(n\ln(ny) - ny)\mathrm{d}y = n\exp(n\ln n)\int_0^\infty \exp(n\ln y - ny)\mathrm{d}y$.

e) Laut Hinweis, suchen wir das Maximum des Exponenten: $(\ln y - y)' = 0 \implies y_{\max} = 1$, und die Taylor-Entwicklung um $y_{\max}$ ist $\ln y - y = -1 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \mathcal{O}(y^3)$. Einsetzen im Ergebnis von d) gibt $n! = \Gamma(n+1) \simeq ne^{n\ln n}\int_0^\infty \exp[n(-1-\frac{1}{2}(y-1)^2)]\mathrm{d}y = ne^{n\ln n - n}\int_0^\infty e^{-\frac{n}{2}(y-1)^2}\mathrm{d}y$. Eine weitere Näherung $\int_0^\infty e^{-\frac{n}{2}(y-1)^2}\mathrm{d}y \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n}{2}v^2}\mathrm{d}v = \sqrt{2\pi/n}$ liefert dann $n! = \sqrt{2\pi n}e^{n\ln n - n} = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$.

f) Laut Hinweis, schreiben wir $\frac{1}{e^x\pm 1} = \frac{e^{-x}}{1-(\mp e^{-x})} = e^{-x}\sum_{n=0}^\infty (\mp)^n e^{-nx}$. Somit ist $I_\pm = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x\pm 1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty (\mp)^n \int_0^\infty x^{s-1}e^{-(n+1)x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty (\mp)^n \frac{1}{(n+1)^s}\int_0^\infty y^{s-1}e^{-y}\mathrm{d}y = \Gamma(s)\sum_{n=0}^\infty (\mp)^n\frac{1}{(n+1)^s}$. Wir haben gleich, dass $I_- = \Gamma(s)\zeta(s)$, und wir rechnen noch $I_+ = \Gamma(s)\sum_{n=0}^\infty (-)^n\frac{1}{(n+1)^s} = \Gamma(s)\sum_{n=1}^\infty (-)^{n+1}\frac{1}{n^s} = \Gamma(s)\big(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^s} - \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k)^s}\big)$ wo wir gerade/ungerade k's gruppiert haben. Da die Summe über gerade k's gleich die gesamte Summe minus Summe über ungerade k's ist, gilt: $I_+ = \Gamma(s)\big(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k)^s} - 2\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k)^s}\big) = \Gamma(s)\big(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k)^s} - 2^{1-s}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k)^s}\big) = (1-2^{1-s})\Gamma(s)\zeta(s)$.

g) Wir haben: $I_+(2) = (1-2^{1-2})\Gamma(2)\zeta(2) = \frac{1}{2}1!\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$, $I_+(3) = (1-2^{1-3})\Gamma(3)\zeta(3) = \frac{3}{4}2!\frac{7\pi^3}{180} = \frac{3}{2}\frac{7\pi^3}{180}$, $I_+(4) = (1-2^{1-4})\Gamma(4)\zeta(4) = \frac{7}{8}3!\frac{\pi^4}{90} = \frac{7\pi^4}{180}$, und $I_-(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $I_-(3) = \frac{7\pi^3}{90}$, $I_-(4) = \frac{\pi^4}{15}$.

Aufgabe 2: Ensemble aus 3 Atomen

Da die Atome identisch sind, ist $p_{i,\nu}$ unabhängig von i.
Der Hilbertraum des gesamten Systems ist $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{H}_3$, also $|\nu\rangle_{\text{ges.}} = |\nu_1\rangle\otimes|\nu_2\rangle\otimes|\nu_3\rangle$. Der Hamilton Operator ist $H_{\text{ges.}} = H_1 + H_2 + H_3$ und agiert $H_{\text{ges.}}|\nu\rangle_{\text{ges.}} = (\nu_1\epsilon + \nu_2\epsilon + \nu_3\epsilon)|\nu\rangle_{\text{ges.}}$ und es gilt, dass $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 4$. Dann zählen wir Konfigurationen, bei denen sich oBdA das Atom 1 im Zustand $\nu = 0, 1, 2, 3$ findet. Es gilt $\nu_1 = 4 - \nu_2 - \nu_3$ und wir haben:

ν_1	(ν_2, ν_3)	Gesamtzahl Zustände
0	(3,1)	
	(2,2)	# 3
	(1,3)	
1	(3,0)	
	(2,1)	# 4
	(1,2)	
	(0,3)	
2	(2,0)	
	(1,1)	# 3
	(0,2)	
3	(1,0)	# 2
	(0,1)	

Wir zählen 12 mögliche Zustände, und finden für p_ν: $p_0 = \frac{3}{12}, p_1 = \frac{4}{12}, p_2 = \frac{3}{12}$ und $p_3 = \frac{2}{12}$.

Aufgabe 3: Wahrscheinlichkeitsverteilungen

a) Laut Definition ist

$$
\begin{aligned}
\phi(k) &= \frac{1}{2a}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\; e^{ikx}e^{-\frac{|x|}{a}} = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x\; e^{ikx}e^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{2a}\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x\; e^{ikx}e^{-\frac{x}{a}} \\
&= \frac{1}{2a}\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x\; e^{-ikx}e^{-\frac{x}{a}} + \frac{1}{2a}\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x\; e^{ikx}e^{-\frac{x}{a}} \\
&= \frac{1}{a}\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x\; \cos(kx)e^{-\frac{x}{a}} \\
&\overset{\text{I.b.P.}}{=} -\cos(kx)e^{-\frac{x}{a}}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{d}x\; (\cos(kx))' e^{-\frac{x}{a}} \\
&\overset{\text{I.b.P.}}{=} 1 + \cancel{ka\sin(kx)e^{-\frac{x}{a}}\Big|_0^\infty} - k^2 a\int_0^\infty \mathrm{d}x\; \cos(kx)e^{-\frac{x}{a}} \\
&= 1 - k^2a^2\phi(k)
\end{aligned}
$$

also ist $\phi(k) = \frac{1}{1+k^2a^2}$.

Für die Momente gilt, dass $m_r = (-i)^r \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}k^r}\phi(k)\big|_{k=0}$, und $\frac{1}{1+k^2a^2} = 1 + (-k^2a^2) + (-k^2a^2)^2 + \ldots = \phi(0) + \phi'(0)k + \frac{1}{2}\phi''(0)k^2 + \ldots$. Wir können ablesen: $m_1 = 0$ und $m_2 = -\phi''(0) = +2a^2$.

b) Wir berechnen die Momente von der Definition $m_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a^3}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\; x^{k+2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$. Für ungerade k folgt $m_k = 0$ direkt aus Antisymmetrie des Integranden. Für gerade k benutzen wir $\frac{x^2}{2a^2} = y \implies x = a\sqrt{2y} \implies \mathrm{d}x = \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}}$ und wir haben

$$
\begin{aligned}
m_k &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a^3}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\; x^{k+2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a^3}\int_0^\infty \mathrm{d}x\; x^{k+2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a^3}a^{k+3}2^{k/2+1-1/2}\int_0^\infty \mathrm{d}y\; y^{k/2+1-1/2}e^{-y} \\
&= 2\sqrt{\frac{2^{k+2}}{\pi}}a^k\int_0^\infty \mathrm{d}y\; y^{(k+3)/2-1}e^{-y} \\
&= 2\sqrt{\frac{2^{k+2}}{\pi}}a^k\Gamma\big(\tfrac{k+3}{2}\big).
\end{aligned}
$$

Also $m_1 = 0$ und $m_2 = 8\pi^{-1/2}a^2\Gamma(\frac{5}{2}) = 8\pi^{-1/2}a^2\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = 6a^2$.

Bei Fragen E-Mail an *tabler.alexander@physik.uni-muenchen.de*