Zentralübung

Thermodynamik und Statistische Physik (T4)

Blatt 14

WiSe 2019/20

Aufgabe 1: Das Potts Modell

In dieser Aufgabe betrachten wir eine Verallgemeinerung des eindimensionalen Ising-Modells mit periodischen Randbedingungen, das Potts-Modell. Jedem Gitterpunkt $i = 1, \dots, N$ mit Gitterabstand $a = 1$ wird eine 3-wertige Variable $s_i \in \{1, 2, 3\}$ zugeordnet. Der Konfigurationsraum Ω ist damit $3N$-dimensional. Die Energie einer Konfiguration $\omega \in \Omega$ ist

$$H(\omega) = -2J \sum_{i=1}^{N} \delta_{s_i, s_{i+1}} - 2h \sum_{i=1}^{N} \delta_{s_i, 1}.$$

a) Bestimmen Sie die Transfermatrix T und dann die Zustandssumme $Z = \mathrm{tr}(T^N)$.
Teilergebnis: 3 Eigenwerte: $\lambda_\pm$ durch Lösung von $\lambda^2 - (\zeta z + \zeta + 1)\lambda + z(\zeta - 1)(\zeta + 2) = 0$ und $\lambda_3 = \zeta - 1$, wo $\zeta = e^{2\beta J}$ und $z = e^{2\beta h}$.

b) Zeigen Sie, dass für die freie Energie gilt im Limes $N \to \infty$ dass $\frac{F}{N} = -kT \log \lambda_+$, wo λ_+ der größte Eigenwert von T ist.

c) Verallgemeinern Sie diese Rechnung für das q-wertige Potts Modell, also wo $s_i \in \{1, \dots, q\}$.

Aufgabe 2: Korrelationslänge für das Ising-Modell

Betrachten Sie das eindimensionale Ising-Modell mit periodischen Randbedingungen ohne Magnetfeld:

$$H = -J \sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1}, \qquad s_i = \pm 1, \qquad s_{N+1} = s_1.$$

a) Berechnen Sie den Korrelator $\langle s_i \, s_{i+r} \rangle$ mittels der Transfermatrix T und drücken Sie das Ergebnis durch die Eigenwerte von T aus.

b) Bestimmen Sie die Korrelationslänge ξ, die durch $\langle s_i \, s_{i+r} \rangle \equiv e^{-r/\xi}$ definiert ist. Diskutieren Sie den Limes $N \gg r$.

Bei Fragen E-Mail an *tabler.alexander@physik.uni-muenchen.de*