Zentralübung

Thermodynamik und Statistische Physik (T4)

Blatt 13

WiSe 2019/20

Aufgabe 1: Bosegas im Magnetfeld II

Betrachten Sie das System nicht-wechselwirkender Spin 1 Bosonen in einem Magnetfeld mit ein-Teilchen Hamilton Funktion $H(\vec{p}, s_z) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu_0 B s_z$ von Blatt 12. Sie haben mit Hilfe der Funktion $g_\nu(z) = \sum_{n=1} \frac{z^n}{n^\nu}$ die Gesamtzahlen und Suszeptibilität gerechnet

$$N_s = \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z e^{\beta \mu_0 B s}), \qquad \chi(T, \mu) = \frac{2\mu_0^2 V}{kT\lambda^3} g_{1/2}(z).$$

a) Bestimmen Sie $\chi(T,n)|_{B=0}$, wo $n = N/V$, im Bereich mit z klein.
Hinweis. Invertieren Sie die Reihe $n(z)$ und ersetzen Sie das Resultat in $\chi(T,\mu)$.

b) Bestimmen Sie die kritische Temperatur $T_c(n, B = 0)$ der Bose-Einstein Kondensation. Wie verhält sich die Suszeptibilität, wenn sich die Temperatur von oben der kritischen Temperatur T_c nähert?

c) Wie lautet das chemische Potential μ für $T < T_c(n)$, bei einen kleinen aber endlichen Wert für B? Welcher Zustand ist in diesem Bereich mit einer makroskopischen Teilchenanzahl besetzt?

Aufgabe 2: Dirac Teilchen

Dirac Teilchen sind nicht-wechselwirkende Spin 1/2 Fermionen mit Einteilchenzustände die paarweise mit folgenden Energieverteilungen (unabhängig vom Spin) auftauchen:

$$\mathcal{E}_\pm(\vec{k}) = \pm\sqrt{m^2c^4 + \hbar k^2 c^2}$$

a) Zeigen Sie, dass für jedes fermionische System mit chemischen Potential μ die Wahrscheinlichkeit dafür, einen besetzten Zustand mit Energie $\mu + \delta$ zu finden, mit der Wahrscheinlichkeit, einen unbesetzten Zustand der Energie $\mu - \delta$, zu finden, übereinstimmt. Hierbei bezeichnet δ eine beliebige Konstante Energie.

Bei Temperatur $T = 0$ sind alle 1-Teilchen Dirac Zustände mit negativen Energien besetzt, während die mit positiven Energien leer sind, d.h. $\mu(T = 0) = 0$. Dies gilt auch für $T > 0$.

b) (*Bonus Aufgabe*) Finden Sie ein Argument dafür.

c) Zeigen Sie, dass die mittlere angeregte Energie dieses Systems bei Temperatur T, folgende Gleichung erfüllt:

$$E(T) - E(0) = 4V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{E}_+(\vec{k})}{\exp\left(\beta\mathcal{E}_+(\vec{k})\right) + 1}$$

d) Rechnen Sie die rechte Seite der letzten Gleichung für masselose Dirac Teilchen zum Ergebnis:

$$E(T) - E(0) = \frac{7\pi^2}{60} V k_B T \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3$$

Hinweis. Für $f_\nu(z) \equiv -g_\nu(-z)$ aus Blatt 12 gilt $f_4(1) = \frac{7\pi^4}{720}$.

Aufgabe 3: Relativistisches Bosonengas in d Dimensionen

In dieser Aufgabe betrachten wir ein Gas nicht-wechselwirkender (spinlose) Bosonen mit ein-Teilchen Energie $\epsilon = c|\vec{p}|$ in d Dimensionen in einem Volumen V.

a) Bestimmen Sie das großkanonische Potential $G = -kT \ln Z_{\mathrm{GK}}$ und die Dichte $n = \frac{N}{V}$ bei chemischen Potential μ als Funktionen von $z = e^{\beta\mu}$, T und d. Benutzen Sie dabei das Resultat aus Blatt 7: $\Omega_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$.
Teilergebnis: $G = -kTV\left(\frac{kT}{hc}\right)^d \frac{\pi^{d/2} d!}{(d/2)!} g_{d+1}(z)$ und $n \sim g_d(z)$, wo $g_\nu(z)$ die Spezialfunktion aus Blatt 12.

b) Bestimmen Sie den Druck p und die Energie E des Gases, und vergleichen Sie $\frac{E}{pV}$ mit dem klasischen Wert $\left(\frac{E}{pV}\right)_{\mathrm{Clas.}} = d$.

c) Bestimmen Sie die kritische Temperatur für Bose-Einstein Kondensation. Schreiben Sie das Ergebnis mit Hilfe der Riemannischen Zeta-Funktion $g_\nu(1) = \zeta(\nu)$. Gibt es eine Kondensation für alle Dimensionen?

d) Bestimmen Sie das Temperaturverhalten der Wärmekapazität $c(T)$ für $T < T_c(n)$. Benutzen Sie dazu ihre Rechnung aus b).
Ergebnis: $c(T) \sim T^d$.

e) Berechnen Sie die dimensionsfreie Wärmekapazität $\frac{c(T)}{kN}$ bei $T = T_c$ und vergleichen Sie diese mit dem klassischen Wert $\left(\frac{c(T)}{kN}\right)_{\mathrm{Clas.}} = d$.
Hinweis. Benutzen Sie die Formeln aus a) und d) im Limes $(T \to T_c) \equiv (z \to 1)$.

Bei Fragen E-Mail an *tabler.alexander@physik.uni-muenchen.de*