

## Zentralübung

# Thermodynamik und Statistische Physik (T4)

## Blatt 12

WiSe 2019/20

### Aufgabe 1: Quantenkorrekturen

In der Vorlesung haben Sie die erste Quantenkorrektur der Zustandsgleichung eines idealen Fermi-gases berechnet:

$$pV = NkT \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^3}{2^{5/2} v} \right], \quad v = \frac{V}{N}.$$

Hierbei manifestiert sich das Pauli Prinzip in der Erhöhung des Drucks im Vergleich zum klassischen Ergebnis. In dieser Aufgabe berechnen Sie die erste Quantenkorrektur für ein freies Bosonengas. Die großkanonische Zustandssumme und Teilchenzahl wurde in der Vorlesung berechnet

$$Z_G^{\text{Bos.}} = \prod_i Z_i^{\text{Bos.}}, \quad Z_i^{\text{Bos.}} = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}},$$
$$N = \frac{\partial}{\partial(\beta\mu)} \ln Z_G = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}$$

wo mit  $\prod_i / \sum_i$  ein Produkt/Summe über Zustände gemeint ist, und es gilt  $\ln Z_G = \frac{pV}{kT}$ .

- a) Im Kontinuumslimit ersetzen wir  $\sum_i \mapsto (2s+1) \frac{V}{h^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3p$ ,  $\epsilon_i \mapsto \epsilon(\vec{p})$  wo  $s = 0, 1, \dots$  der Spin des Gases ist, und  $\epsilon(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}$  für freie Teilchen. Zeigen Sie im Kontinuumslimit, dass gilt

$$\frac{p}{kT} = (2s+1) \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z),$$
$$v^{-1} = (2s+1) \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z),$$

wo  $\lambda = h/\sqrt{2\pi mkT}$ ,  $z = e^{\beta\mu}$  und die verallgemeinerte Zeta-Funktion

$$g_\nu(z) := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{e^x z^{-1} - 1}$$

- b) Benutzen Sie die Formeln  $g_\nu(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^\nu}$  um die Quantenkorrektur zur klassischen Zustandsgleichung bis zu linearer Ordnung in  $\frac{\lambda^3}{v}$  zu berechnen. Ergebnis:

$$pV = NkT \left[ 1 - \frac{1}{(2s+1)2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{v} \right]$$

*Hinweis.* Der klassische Limes  $u := \frac{\lambda^3}{v} \ll 1$  korrespondiert zu  $z \ll 1$ . Entwickeln Sie  $\frac{\lambda^3}{v}$  bis zu zweiter Ordnung in  $z$  und invertieren Sie die Reihe um  $z(u)$  zu bestimmen.

- c) Berechnen Sie die isotherme Kompressibilität

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T,N}.$$

Bitte wenden →

## Aufgabe 2: Bosegas im Magnetfeld

Betrachten Sie ein System nicht wechselwirkender Spin 1 Bosonen in einem Magnetfeld. Der Hamiltonoperator für ein Teilchen ist gegeben durch

$$H(\vec{p}, s_z) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu_0 B s_z$$

$s_z$  kann die Werte  $\pm 1$  und  $0$  annehmen.

- Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme für dieses System.
- Berechnen Sie die mittleren Besetzungszahlen  $\langle n_s(\vec{k}) \rangle$  der Einteilchenzustände mit Wellenzahl  $\vec{k}$  und  $s = -1, 0, 1$ .
- Berechnen Sie die Gesamtzahl  $N_s = \sum_{\vec{k}} \langle n_s(\vec{k}) \rangle$  der Teilchen mit Spin  $s$ . Approximieren Sie hierzu die Energieniveaus durch eine kontinuierliche Verteilung. Verwenden Sie hierzu den Ausdruck für die verallgemeinerte Zeta-Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n+1} \frac{z^n}{n^s} = \begin{cases} g_s(z) \\ f_s(z) \end{cases}$$

*Ergebnis:*  $N_s = \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z \cdot e^{\beta \mu_0 B s})$ , wobei  $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$  und  $z = e^{\mu\beta}$ .

- Bestimmen Sie die Magnetisierung  $M(T, \mu) = \mu_0(N_+ - N_-)$ . Entwickeln Sie im Limes kleiner  $B$ . Finden Sie die magnetische Suszeptibilität  $\chi(T, \mu) = \partial M / \partial B$  in diesem Limes.

*Ergebnis:*  $\chi = \frac{2\mu_0^2 V}{k_B T \lambda^3} g_{1/2}(z)$

## Aufgabe 3: Nicht-wechselwirkende Bosonen

Betrachten Sie eine großkanonische Gesamtheit aus nicht wechselwirkenden Bosonen mit chemischem Potential  $\mu$ . Die 1-Teilchen Zustände sind durch den Wellenvektor  $\vec{q}$  bestimmt und besitzen Energie  $\mathcal{E}(\vec{q})$ .

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(\{n_{\vec{q}}\})$ , dass sich das System in der Konfiguration mit Besetzungszahlen  $\{n_{\vec{q}}\}$  befindet. Drücken Sie diese in Abhängigkeit von der Fugazitäten  $z_{\vec{q}} = \exp(\beta(\mu - \mathcal{E}(\vec{q})))$  aus.  
*Ergebnis:*  $P(\{n_{\vec{q}}\}) = \prod_{\vec{q}} (1 - z_{\vec{q}}) z_{\vec{q}}^{n_{\vec{q}}}$
- Für einen gegebenen Wellenvektor  $\vec{q}$ , berechnen Sie die charakteristische Funktion  $\langle \exp[ikn_{\vec{q}}] \rangle$ .  
*Ergebnis:*  $\langle \exp[ikn_{\vec{q}}] \rangle = \frac{1 - z_{\vec{q}}}{1 - z_{\vec{q}} e^{ik}}$ .
- Bestimmen Sie nun den Erwartungswert  $\langle n_{\vec{q}} \rangle$  und die Varianz  $\langle n_{\vec{q}}^2 \rangle - \langle n_{\vec{q}} \rangle^2$ .
- Drücken Sie die Varianz aus Teil c) in Abhängigkeit von dem Erwartungswert  $\langle n_{\vec{q}} \rangle$  aus.
- Drücken Sie Ihre Antwort für Teil a) in Abhängigkeit der Besetzungszahlen  $\{ \langle n_{\vec{q}} \rangle \}$  aus.
- Berechnen Sie die der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(\{n_{\vec{q}}\})$  entsprechende Entropie und drücken Sie diese in Abhängigkeit von  $\{ \langle n_{\vec{q}} \rangle \}$ .

Bei Fragen E-Mail an [tabler.alexander@physik.uni-muenchen.de](mailto:tabler.alexander@physik.uni-muenchen.de)